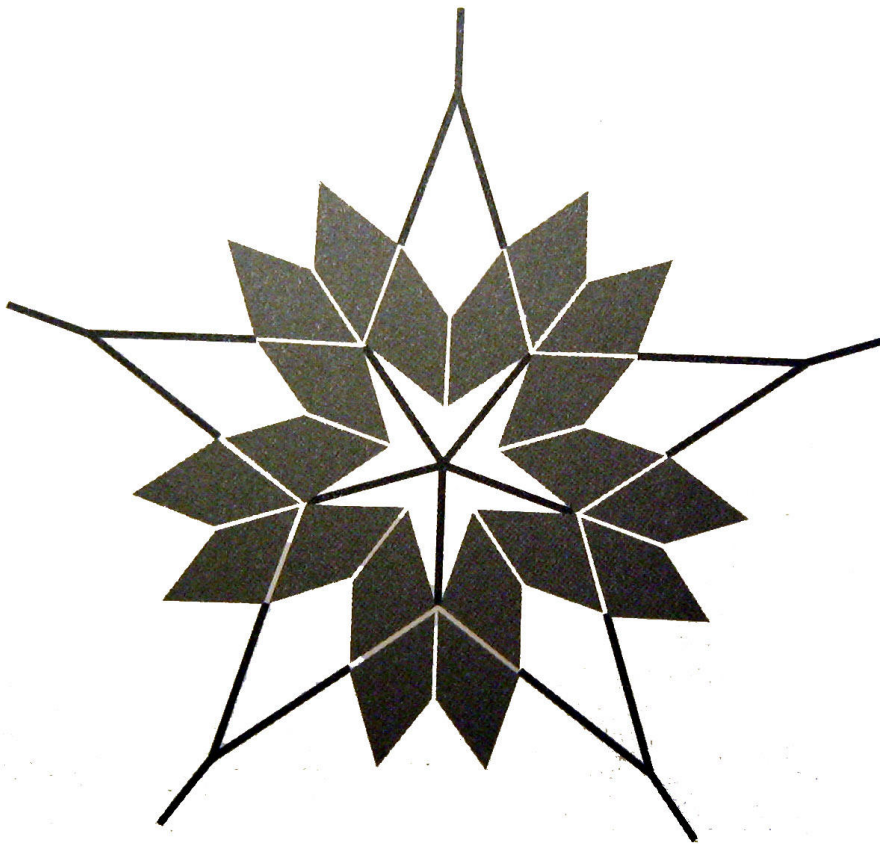


Umstülpungskörper



Seminar Geometrische Raumstrukturen

Technische Universität Kaiserslautern
Sommersemester 2005

Ellen Pawlowski

Umstülpungskörper

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	2
1. Tetraederringe	3
1.1 Ringe aus regelmäßigen Tetraedern	3
1.2 Sechsgliedrige Ringe	4
1.3 Zwanglauf	5
2. Platonische Umstülpungskörper mit Zwanglauf	5
2.1 Die Zerlegung	5
3. Platonische Umstülpung	6
3.1 Forderungen an die Platonische Umstülpung	7
3.2 Konstruktionsprinzipien	8
3.2.1 Teilung durch Symmetrieebenen	8
3.2.2 Der Umstülpgürtel	10
3.3 Überblick über Platonische Umstülpungskörper	11
3.4 Die Umstülpungsphasen	11
3.4.1 Der Würfel von Konrad Schneider	11
3.4.2 Das Oktaeder von Immo und Friedemann Sykora	13
4. Zusammenfassung und Ausblick	16
Literatur- und Quellenverzeichnis	16

0. Einleitung

Nicht erst seit der Entdeckung des umstülpbaren Würfels von Paul Schatz üben bewegliche Körper eine besondere Faszination aus. Seit diese Entdeckung wurde jedoch gezielt nach solchen Körpern gesucht und eine Reihe von verschiedenen Umstülpungskörpern entwickelt. Hier wird ein Überblick über die Eigenschaften dieser Körper und über die hinter ihnen stehenden mathematischen Konzepte gegeben.

Zunächst werden anhand von Ringen aus Tetraedern die Eigenschaften beweglicher Gelenkketten sowie deren Konstruktion analysiert. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse werden dann bei der Suche nach Umstülpungen der Platonischen Körper angewandt. Dabei wird zunächst auf die zwangsläufigen Umstülpungskörper von Klaus Ernhof und deren Konstruktion eingegangen, bevor das Konzept der Platonischen Umstülpung nach Wolfgang Maas und der Familie Sykora untersucht wird. Auch hier wird die Konstruktion beleuchtet, ferner werden die einzelnen Umstülpungsphasen anhand von zwei Beispielen genauer beschrieben.

1. Tetraederringe

Die einfachsten räumlichen Umstülpungskörper sind Tetraederringe, auch rotierende Ringe genannt. Sie bestehen aus mehreren identischen Tetraedern. Je zwei Tetraeder sind über eine gemeinsame sogenannte Gelenkkante miteinander verbunden, so dass ein Ring entsteht. Dieser muss jedoch bestimmte Voraussetzungen erfüllen, um zu den Umstülpungskörpern zu gehören. Der Ring muss in der Lage sein, eine zyklische Bewegung auszuführen, so dass er durch eine Reihe von Formverwandlungen wieder in seinen Ausgangszustand zurückkehrt – dies allerdings ohne in eine „Sackgasse“ zu geraten, das heißt ohne eine Bewegung rückgängig machen zu müssen. Im Folgenden werden die Bedingungen für die Beweglichkeit solcher Körper am Beispiel der sechsgliedrigen Ringe untersucht.

1.1 Ringe aus regelmäßigen Tetraedern

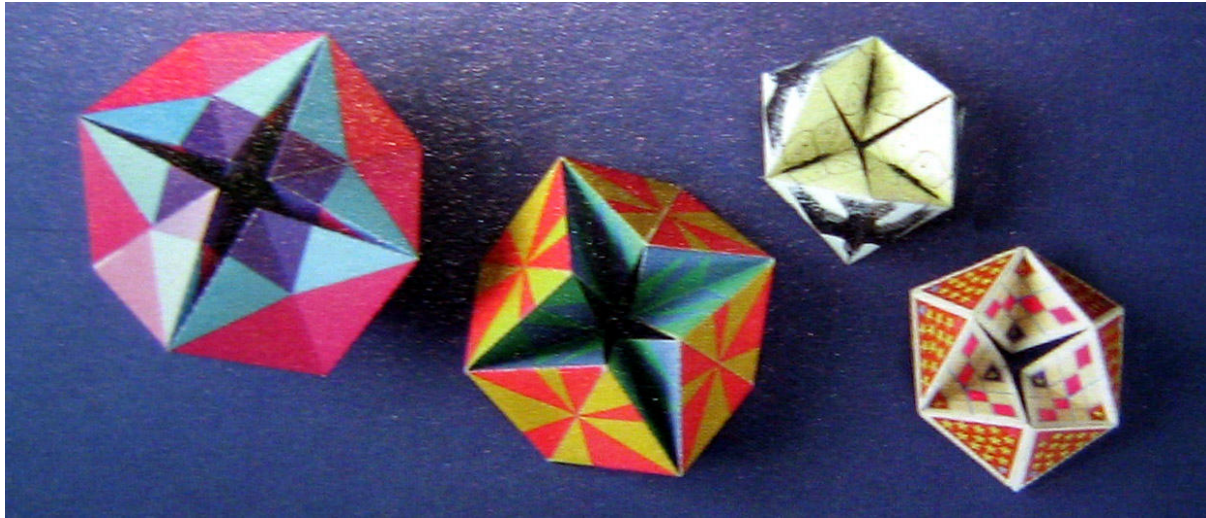


Wir betrachten zunächst solche Ringe, die als Elemente lauter regelmäßige Tetraeder besitzen. Bei solchen Tetraedern stehen zwei gegenüberliegende Kanten aufeinander senkrecht, daher gilt hier gleiches für zwei benachbarte Gelenkkanten. Die Anzahl der Elemente ist nach oben hin offen, ohne dass sich irgendwelche Einschränkungen der Beweglichkeit ergeben. Ab 22 Elementen kann man den Ring sogar verknoten, ohne dass die Rotationsfähigkeit beeinträchtigt wird.

Es müssen allerdings mindestens 6 Elemente sein, damit der Ring geschlossen werden kann, ohne dass sich die Körper durchdringen. Ein Ring mit 6 regelmäßigen Tetraedern ist jedoch kein Umstülpungskörper, da keine zyklische Bewegung möglich ist: Die Gelenkkanten sind schlichtweg zu lang, so dass die Tetraeder sich beim Durchgang durch die Ringmitte gegenseitig blockieren. Ähnliche Probleme ergeben sich bei sieben Elementen. Die Mindestanzahl regelmäßiger Tetraeder in einem rotierenden Ring ist also 8.

Je mehr Elemente ein Ring umfasst, desto deformierbarer wird er und desto schwieriger wird es, eine gleichmäßige, symmetrische Bewegung auszuführen – aber gerade die ist das Besondere an solchen Ringen. Daher betrachten wir nun möglichst kleine Ringe, die in ihrer Beweglichkeit genug eingeschränkt sind, um interessant zu sein, aber noch genügend Freiheit haben, um rotieren zu können.

1.2 Sechsgliedrige Ringe



Lockert man die Einschränkung auf regelmäßige Tetraeder ein wenig und lässt auch kongruente gleichschenklige Dreiecke als Flächen zu, so ist es möglich, einen rotierenden sechselementigen Ring zu konstruieren. Diese Ringe nennt man auch Kaleidozykel (griech.: kalos = Schönheit).

Besonders hübsch wirken Modelle, bei denen die Proportionen so gewählt sind, dass sich die Gelenkkanten beim Durchgang durch die Mitte gerade berühren, ohne sich zu behindern. Dies kann man auch für beliebige kongruente Dreiecke als Flächen erreichen. Die einzige Forderung, die beibehalten wird, ist die nach Symmetrie: Jede Gelenkkante soll eine Symmetrieachse zwischen den beiden benachbarten Elementen sein.

Man kann zeigen, dass so ein Ring durch die Angabe von drei Größen eindeutig festgelegt wird: die Länge L der Gelenkkanten, die Länge E eines Elements – gemessen zwischen den Mittelpunkten zweier benachbarter Gelenkkanten – und der Verdrehungswinkel ϕ . Aus diesen Werten lassen sich die Längen der seitlichen Kanten und die Winkel eines Flächendreiecks berechnen.

Wenn ein Ring nicht rotieren kann, so liegt es daran, dass sich die Gelenkkanten beim Mittendurchgang blockieren. Dies tritt dann auf, wenn sie länger sind als ein bestimmter Grenzwert, die sogenannte maximale Gelenklänge H . Diese hängt nur vom Drehwinkel ϕ ab, der angibt, um welchen Winkel zwei benachbarte Gelenke verdreht sind. Es gilt

$$H = 2 \sqrt{\cot^2 60^\circ - \cot^2 \phi} \quad \text{wobei } 60^\circ \leq \phi \leq 90^\circ.$$

Diese Formel gilt nur für Ringe mit sechs Elementen; für allgemeine Ringe mit $2n$ Gliedern lautet die Gleichung

$$H = 2 \sqrt{\cot^2 \frac{180^\circ}{n} - \cot^2 \phi} \quad \text{wobei } 180^\circ/n \leq \phi \leq 90^\circ.$$

Wählt man nun für L den maximalen Wert H , so berühren sich die Gelenke beim Mittendurchgang. Für größere Werte kann der Ring nicht rotieren, und für kleinere Werte bleibt beim Mittendurchgang immer eine Lücke offen.

1.3 Zwanglauf

Ein frei im Raum beweglicher Körper hat sechs Freiheitsgrade, drei Translationen und drei Rotationen. Wird der Körper zum Teil einer Kette oder eines Rings, so reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade. Allgemein lässt sich die Anzahl der Freiheitsgrade eines Rings durch folgende Formel berechnen:

$$F = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i$$

wobei n die Anzahl der Elemente, g die Anzahl der Gelenke und f_i die Freiheitsgrade der einzelnen Körper bezeichnen. Hier werden nur Scharniergelenke betrachtet, also gilt $f_i = 1$ für jedes Element. Für einen sechsgliedrigen Ring ergibt sich also

$$F = 6(6 - 6 - 1) + 6 = 0,$$

also sind solche Ringe im allgemeinen starr. Unter bestimmten Bedingungen ist jedoch eine sogenannte zwangläufige Bewegung möglich, das heißt, eine Bewegung an irgendeiner Stelle im Ring führt zu einer eindeutigen Bewegung des ganzen Rings. Solche Ringe, die sich bewegen, obwohl sie eigentlich zu wenige Glieder enthalten, nennt man auch übergeschlossene Ringe. Sie entstehen, wenn die Gelenkachsen sich alle mit derselben Gerade schneiden, was bei den hier betrachteten Ringen stets der Fall ist, da wir Symmetrie gefordert haben.

2. Platonische Umstülpungskörper mit Zwanglauf

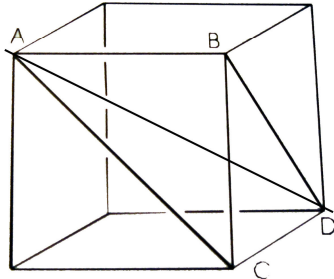
Paul Schatz entwickelte 1929 eine zwangläufigen Gelenkring aus dem Würfel. Schon damals ergab sich für ihn die Frage, ob das auch für andere Polyeder möglich sei. Hinsichtlich der Platonischen Körper hat Klaus Ernhöfer 1985 darauf die Antwort gefunden, indem er teilweise sogar mehrere Möglichkeiten fand, zwangläufige Gelenkringe aus den Platonischen Körpern zu entnehmen.

Dazu unterteilt er den Platonischen Körper in den sogenannten Umstülppgürtel – ein Gelenkring aus sechs Elementen (die nicht unbedingt Tetraeder sein müssen) – und einen oder mehrere sogenannte Riegelkörper, die den Umstülppgürtel zum Platonischen Körper ergänzen.

2.1 Die Zerlegung

Platonische Körper enthalten sogenannte dreizählige Symmetrieachsen, das heißt, es gibt zu einer solchen Achse drei Symmetrieebenen, die diese Achse beinhalten. Man wählt eine solche Achse mit ihren Symmetrieebenen aus und schneidet diese

mit der Polyederoberfläche. Die Schnittstrecken sind dann entweder Kanten oder flächenhalbierende Strecken. Aus zwei benachbarten Symmetrieebenen wählt man dann zwei solche Schnittstrecken aus und fasst sie als zwei benachbarte Gelenkkanten auf. Der Winkel zwischen den beiden Strecken entscheidet dann darüber, ob ein Umstülpungskörper mit diesen Strecken als Gelenken herstellbar ist oder nicht: er muss zwischen 60 und 90 Grad liegen.



Die Abbildung links zeigt die Schnittstrecken von zwei solchen Symmetrieebenen mit der Würfeloberfläche. Dabei ist die Gerade durch A und D, also die Raumdiagonale, die dreizählige Symmetrieachse. Die Symmetrieebenen sind die beiden Ebenen, die durch das Paar AD x AC und das Paar AD x BD aufgespannt werden. Das Schnittstreckenpaar ist entweder AB x AC, BD x AC, BD x CD oder AB x CD. Ein Umstülpungskörper ist

nur für das letzte Paar möglich, da die Winkel zwischen den anderen Paaren kleiner oder gleich 60° sind. Für das Paar AB x CD (90°-Winkel) ergibt sich der Würfel von Paul Schatz.

Mit der folgenden Formel lassen sich die maximalen Längen der Gelenkkanten berechnen:

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{1 - 3 \cot^2 \phi}{3}}$$

Auf diese Weise ergeben sich beim Würfel eine, beim Tetraeder und Oktaeder zwei, beim Dodekaeder drei und beim Ikosaeder sogar vier verschiedene Umstülpungskörper mit zwangsläufigen Ringen.

Diese Ringe sind nicht nur von mathematischen Interesse, sie finden auch Anwendung im technischen Bereich, unter anderem bei der Herstellung von Mischmaschinen.

3. Platonische Umstülpung

Während man bei der Umstülpung nach Ernhofer analog zum Schatz'schen Würfel nach sechsgliedrigen Ringen in den Platonischen Körper sucht, steht bei der Platonischen Umstülpung der Familie Sykora die geometrische Ganzheit des Platonischen Körpers im Mittelpunkt. Auch hier erfolgt die Untergliederung in Riegelkörper und Umstülp Gürtel. Die Bezeichnung „Gürtel“ legt die Vorstellung nahe, dass der Ring eine mittlere, „äquatoriale“ Position im Körper einnimmt und von den Riegelkörpern, die als „Pole“ fungieren, umschlossen wird. Der Gürtel ist hier jedoch nicht mehr unbedingt sechsgliedrig. Vielmehr soll im Umstülp Gürtel der Charakter des Körpers erkennbar sein. So sollen die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen und deren Struktur erhalten bleiben.

Allerdings können nicht alle Maße des Körpers während der Umstülpung konstant bleiben. Die Längen der Kanten und die Flächenneigungswinkel müssen sich sogar ändern, damit eine Umstülpung überhaupt möglich wird. Auch die Zentralsymmetrie

geht zeitweise verloren. Statt dessen ergibt sich die Symmetrie um die Mittelachse des UmstülpPgürtels, die die beiden Umstülpungspole miteinander verbindet.

Ein solcher Pol kann eine Ecke, eine Fläche oder auch eine Kante sein. Einer der beiden Pole wandert sich zusammenziehend nach innen (Involutionsspol), der andere Pol wandert sich weitend nach außen (Evolutionsspol). Beiden Modellen werden an diesen Stellen die Riegelkörper entnommen. Außerdem soll auch die Beziehung zum polaren platonischen Körper zum Ausdruck kommen.

3.1 Forderungen an die Platonische Umstülpung

Folgende Prinzipien liegen also der Platonischen Umstülpung zugrunde:

Identität:

Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen des Körpers und deren gegenseitige Beziehungen bleiben während der Umstülpphasen erhalten, insbesondere die oben beschriebene Symmetrie längs der Umstülpungsachse.

Konstruierbarkeit:

Der UmstülpPgürtel muss eine zyklische Bewegung ausführen können. Als Gelenke werden alle am UmstülpPgürtel vorhandenen Flächenmitten-Symmetrieachsen und Kanten des Platonischen Körpers genutzt.

Durch die Miteinbeziehung der Flächenmitten-Symmetrieachsen wird der Bezug zum Mittelpunkt des Körpers und außerdem zum polaren Platonischen Körper hergestellt. Die Eckpunkte sind beweglich: sie ergeben sich als Schnittpunkte der Gelenkachsen, die aus den Kanten des Platonischen Körpers entstanden sind.

Umstülpphasen:

Folgende Phasen sollen erkennbar sein:

Urform – hier wird der Gürtel durch seine Riegelkörper zum Platonischen Körper ergänzt.

Unendlichkeitsdurchgang einer Körperhälfte – einige Eckpunkte wandern durch das Unendliche

Vollständiger Ebenendurchgang – die gesamte Körperoberfläche liegt flach in einer Ebene

Zweiter Unendlichkeitsdurchgang des einen Pols

Vollständig umschlossene Negativ- oder Hüllform als umgestülpte Urform – hier liegt wieder Zentralsymmetrie vor, der Gürtel wird durch die umgeklappten Riegelkörper zur vollständigen Negativform ergänzt; die Urform liegt im Innern als Hohlkörper vor.

Unendlichkeitsdurchgang der anderen Körperhälfte

Zweiter vollständiger Ebenendurchgang

Zweiter Unendlichkeitsdurchgang des anderen Pols

Urform.

Polarität:

Die Umstülpung soll der Beziehung des Körpers zu seinem polaren Körper entsprechen. Die Gliederung des Gürtels erfolgt durch die Symmetrieebenen, die dem Platonischen Körper und seinem polaren Körper gemeinsam sind. In der Negativform zeigt der Körper eine räumliche Sternform, wobei deren Spitzen den polaren Körper andeuten.

3.2 Konstruktionsprinzipien

Ausgehend vom Schatz'schen Würfel entwickelten sich grundlegende Ideen und Überlegungen zur Konstruktion, was die Form und Lage des Gürtels und der Riegelkörper betraf. Konrad Schneider hat mit seinem Würfel die richtigen Konstruktionsprinzipien erfasst, obwohl auch sein Modell nicht alle oben gestellten Forderungen erfüllt.

Hier werden die Konstruktionsprinzipien anhand des Würfels von Konrad Schneider und der Oktaeders von Immo und Friedemann Sykora erläutert.

3.2.1 Teilung durch Symmetrieebenen

Der Platonische Körper wird durch seine Symmetrieebenen in gleich große und gleich geformte Segmente. Ob sie zusammengefasst und wie sie durch Scharniere verbunden werden können, richtet sich nach den weiteren aufgestellten Forderungen.

Der Involutions- und Evolutionspol des Körpers müssen wegen der Forderung nach Symmetrie längs einer Symmetrieachse angeordnet werden, so dass sie sich gegenüberliegen. Auf diese Weise ergeben sich drei Möglichkeiten für eine symmetrische Polanordnung:

Eckenpol:

Zwei gegenüberliegende Ecken bilden zusammen mit den zu ihnen hinführenden Kanten die Pole.

Kantenpol:

Zwei gegenüberliegende Kanten bilden mit ihren Endpunkten und den anschließenden Flächen die Pole.

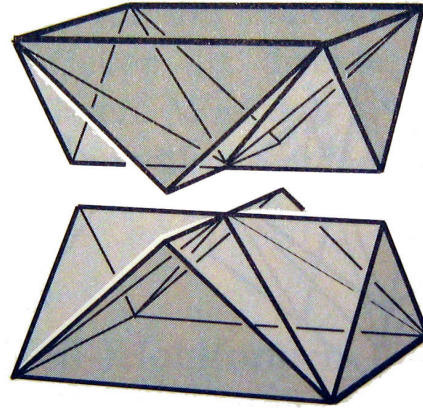
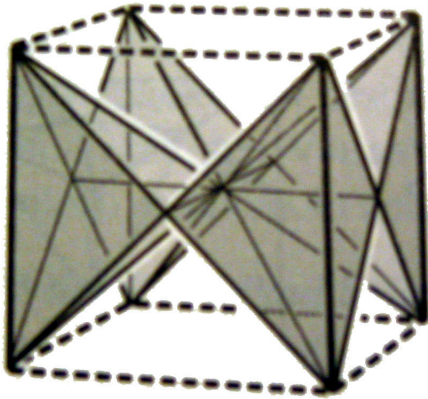
Flächenpol:

Zwei gegenüberliegende Flächen bilden zusammen mit ihren Kanten und Eckpunkten die Pole.

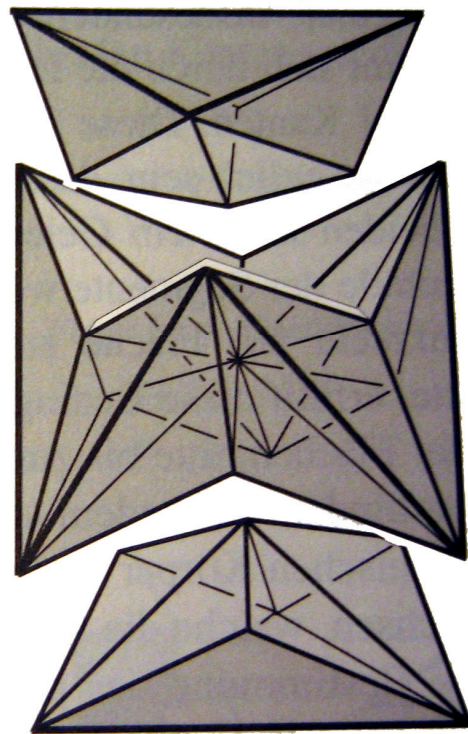
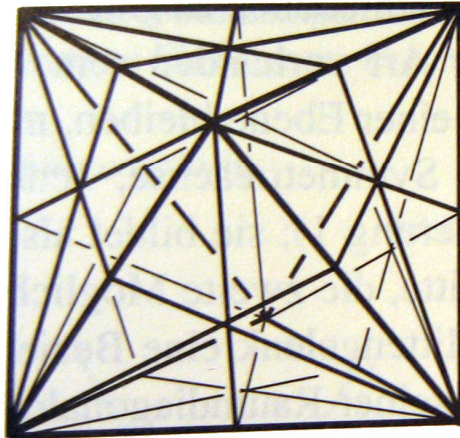
Die Pole werden durch die Riegelkörper verdeutlicht. Der Umstülpgürtel liegt zwischen ihnen und bildet die Verbindung und Vermittlung zwischen den Polen, die man sich während der Umstülpung in der Vorstellung ergänzen kann.

Sowohl der Würfel von Konrad Schneider als auch das Sykora-Oktaeder besitzen Flächenpole.

Wie bereits weiter oben angedeutet, müssen die Riegel entnommen werden, damit eine Umstülpbewegung möglich wird. Die Größe der Riegel wird durch die Möglichkeit des Ebenendurchgangs bestimmt, da dort die Gürtelsegmente am engsten aneinanderrücken. Man zieht aber generell die Teilung durch Symmetrieebenen vor.



Im Beispiel des Schneider-Würfels (siehe Abbildung oben) und des Sykora-Oktaeders (siehe Abbildung unten) werden als Riegel alle Segmente entnommen, die Teil der Polfläche sind oder eine gemeinsame Kante mit der Polfläche besitzen. Durch Gelenke an den Kanten der Polfläche lassen sich die Riegelkörper umklappen und können so als Ergänzung der Negativform verwendet werden.



3.2.2 Der Umstülpgürtel

Wenn man die Riegel entnommen hat, verbleibt eine Anzahl von Segmenten, die noch durch geeignete Gelenke zu einem Ring zusammenzuschließen sind. Sie ergeben den Umstülpgürtel. Wie sind diese nun zu verbinden?

Wegen der Forderung nach einem Ebenendurchgang, bei dem alle Oberflächenteile des ursprünglichen Körpers in einer Ebene vorliegen sollen, müssen alle Flächenneigungswinkel gleichzeitig zu einem gestreckten Winkel werden können. Ebenso müssen alle gleichzeitig den Winkel bilden können, der den Flächenneigungswinkel der Urform zu einem vollen ergänzt, damit die Negativform entstehen kann.

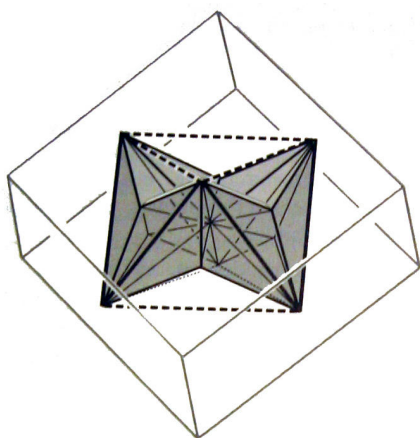
Man kann zeigen, dass diese Bedingungen nur dann erfüllbar sind, wenn alle am Umstülpgürtel vorhandenen Kanten des ursprünglichen Körpers die an sie angrenzenden Flächen beweglich verbinden. Also müssen benachbarte Flächen durch ein Kantengelenk verbunden sein oder ohne direkte Verbindung bleiben.

Allein durch solche Gelenke entsteht aber noch kein Ring. Es werden weitere Verbindungen benötigt. Dazu wurden die folgenden Überlegungen angestellt:

Während der Umstülpung können die – zum Teil ideell ergänzten – Flächen nicht alle regulär, insbesondere nicht gleichseitig bleiben. Ihre Form bestimmt sich durch die Lage der Eckpunkte, die ja nach der Forderungen weiter oben beweglich sind, sowie durch den Winkel zwischen zwei Kanten. Das bedeutet, dass zwei verschiedene Kanten einer Fläche zwei unterschiedlichen Segmenten angehören müssen – und diese müssen untereinander so durch ein Gelenk verbunden sein, dass sich der Winkel zwischen den Kanten ändern kann. Damit die Flächen der Segmente, die zur Oberfläche des Ausgangskörpers gehören, auch während der Umstülpbewegung in einer Ebene bleiben, muss das Gelenk senkrecht zur Fläche stehen.

Diese Forderungen werden von der Flächenmitten-Symmetrieachse erfüllt, dies ist also die zweite Möglichkeit, Segmente zu verbinden.

Ganz nebenbei stellt diese Symmetrieachse auch noch einen Bezug zum polaren Platonischen Körper her: die Achse ist die Raumdiagonale der polaren Körper.



Würde man mehr als zwei Segmente von derselben Körperfläche im Gürtel verwenden, so müssten diese an einem Mittengelenk gekoppelt sein. Dies würde zu Abzweigungen im Ring und damit zu uneinheitlichen Bewegungen führen, was aber nicht den Forderungen für die Platonische Umstülpung entspricht.

Die Abbildung links zeigt den Gürtel beim Oktaeder von Sykora ohne seine Riegelkörper.

3.3 Überblick über Platonische Umstülpungskörper

In der folgenden Tabelle werden die bekanntesten Platonischen Umstülpungsmodelle mit einigen ihrer wichtigsten Eigenschaften dargestellt. Dabei entsprechen nicht alle Modelle sämtlichen Forderungen. Die jeweils zuerst genannten Modelle zeigen die Platonische Umstülpung ideal.

Platonischer Körper	Konstrukteur	Umstülpachse geht durch ...	Anzahl der Glieder im Gürtel
Tetraeder	Franz Sykora	Kante	8
Würfel	Robert Byrnes	Ecke	12
	Konrad Schneider	Fläche	8
	Wolfgang Maas	Kante	2x 8
Oktaeder	Friedemann und Immo Sykora	Fläche	12
	Robert Byrnes	Ecke	16
Dodekaeder	Wolfgang Maas	Fläche	20
Ikosaeder	Robert Byrnes	Ecken	20
	Immo Sykora	Flächen	36

Im folgenden Abschnitt werden nun die einzelnen Phasen bei der Umstülpung anhand des Würfels von Konrad Schneider und des Oktaeders von Friedemann und Immo Sykora genauer beschrieben.

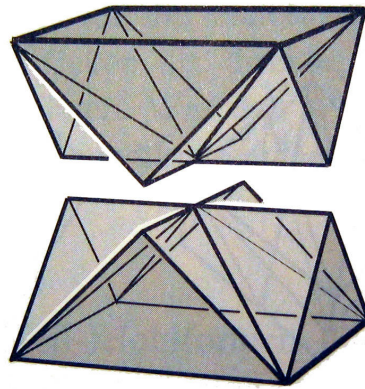
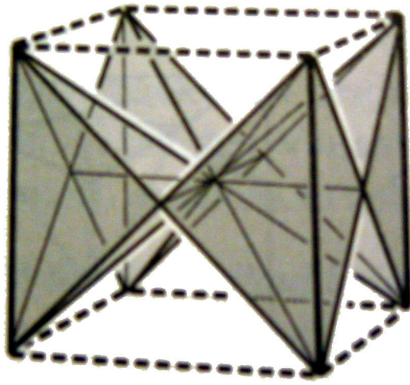
3.4 Die Umstülpungsphasen

3.4.1 Der Würfel von Konrad Schneider

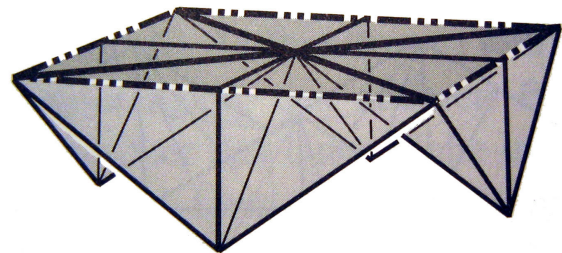
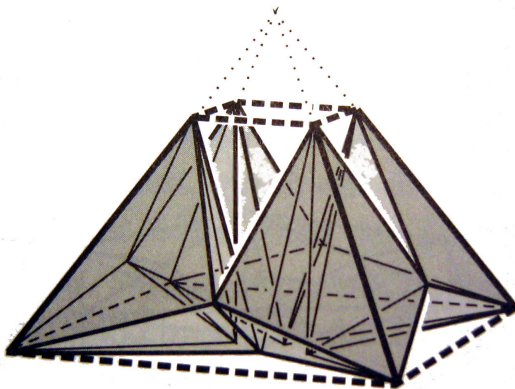
Bei diesem Würfel ergibt sich auf die oben beschriebene Weise ein Gürtel mit acht Segmenten. Diese entstehen durch die Teilung des Würfels durch alle Symmetrieebenen mit Ausnahme derer, die parallel zu den Außenflächen liegen. Die Gürtelsegmente sind an vier zueinander parallel liegenden Kanten und in den Flächenmitten miteinander verbunden.

Der Gürtel nimmt ein Drittel des Würfelvolumens ein; die beiden Riegelkörper sind identisch und nehmen daher ebenfalls jeweils ein Drittel ein. Im Gegensatz zum Oktaeder liegen sich die beiden Riegelkörper genau gegenüber, sind also nicht verdreht zueinander angeordnet (siehe dazu auch Abbildung unten rechts)

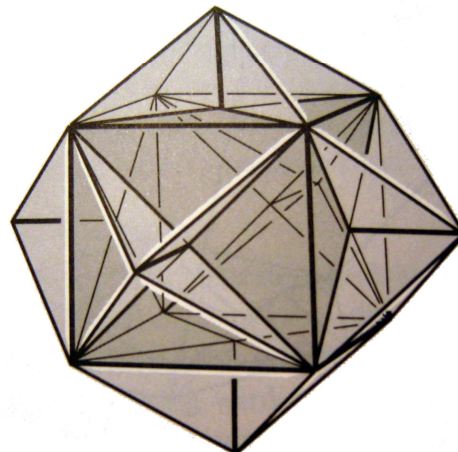
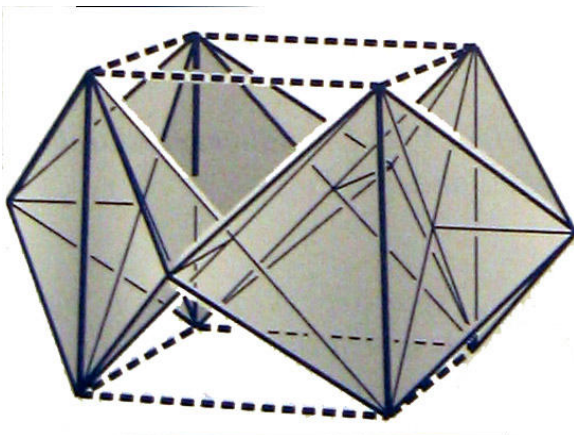
Der Würfel entspricht fast allen Forderungen für Platonische Umstülpungen; lediglich die Forderung nach Unendlichkeitsdurchgängen bleibt unerfüllt. Das liegt daran, dass die Eckpunkte des Würfels praktisch am Gürtel selbst fixiert sind und dadurch nicht ins Unendliche wandern können. In der Abbildung unten links wird die Position der Eckpunkte durch Andeutung des ideellen Würfels (gestrichelte Linie) verdeutlicht.



Während der Umstülpbewegung wird das Volumen des gedachten Würfels kleiner (Abbildung unten links); im Ebenendurchgang löscht es sich aus (Abbildung unten rechts) . Um zur Negativform zu kommen, kann man sich weiter vorstellen, dass das dann neu entstehende Würfelvolumen „negativ“ ist und über den zweiten Ebenendurchgang wieder ins Positive gelangt.



Nach dem Ebenendurchgang wenden sich die Oberflächenteile nach innen (Abbildung unten links), und die Flächen, die vorher im Innern des Würfels lagen, kehren sich nach Außen zur Negativform. Ergänzt man den Gürtel durch die nun umgeklappten Riegel, zeigt diese ein Rhombendodekaeder (Abbildung unten rechts), in dessen Inneren der ursprüngliche Würfel nun als Hohlkörper vorliegt. Die Ecken des Rhombendodekaeders, an denen vier Flächen aufeinandertreffen, bilden miteinander ein Oktaeder, den zum Würfel polaren Platonischen Körper.



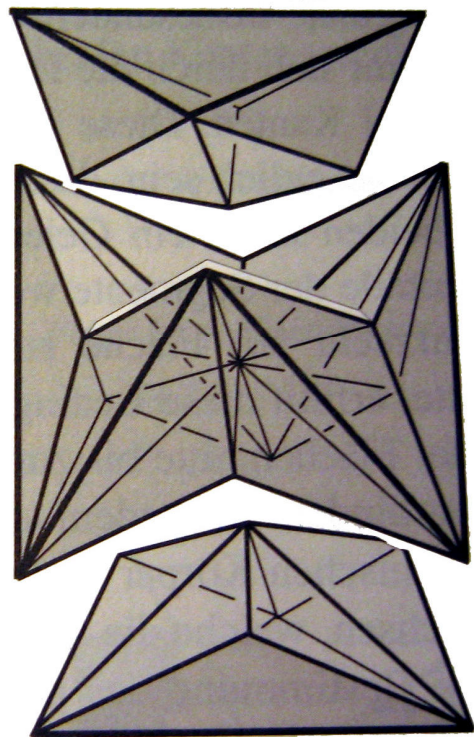
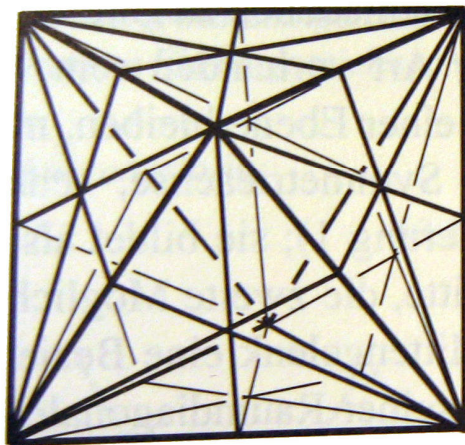
Die weiteren Phasen der Umstülpung erreicht man durch Weiterdrehen des Gürtel in die gleiche Drehrichtung; man durchläuft dabei die bisher gezeigten Phasen in umgekehrter Reihenfolge.

3.4.2 Das Oktaeder von Immo und Friedemann Sykora

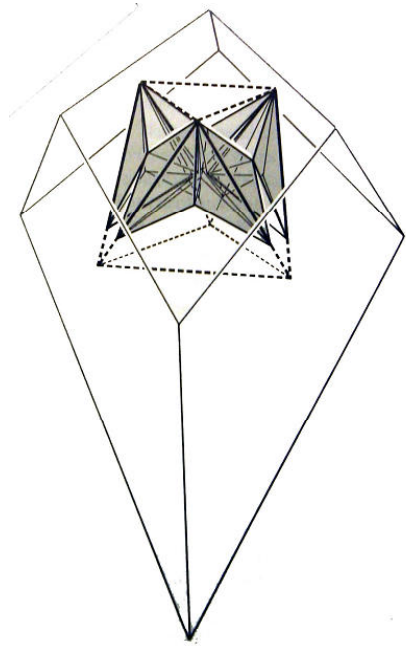
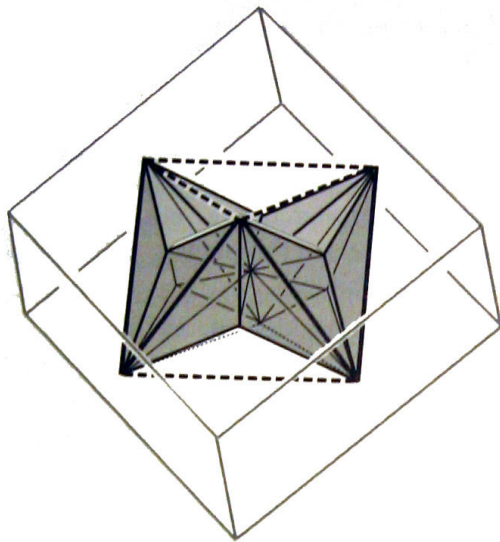
Der Gürtel des Sykora-Oktaeders entsteht auf ähnliche Weise wie der des Konrad-Schneider-Würfels; hier werden die durch die Teilung entlang der Symmetrieebenen entstehenden Segmente allerdings wieder paarweise zu einem größeren Segment zusammengefasst, bevor sie mit Gelenken verbunden werden. Dadurch ergibt sich ein Ring mit 12 Segmenten. Es entstehen sechs Kanten- und sechs Flächenmittengelenke.

In den beiden Abbildungen unten sieht man links die Teilung des Oktaeders durch die Symmetrieebenen und rechts die tatsächliche Aufteilung in Riegel und Gürtelsegmente.

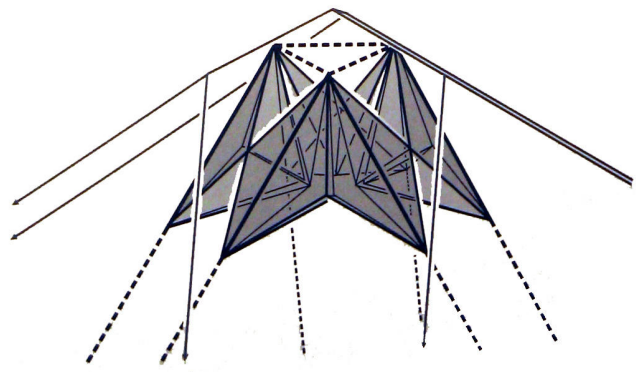
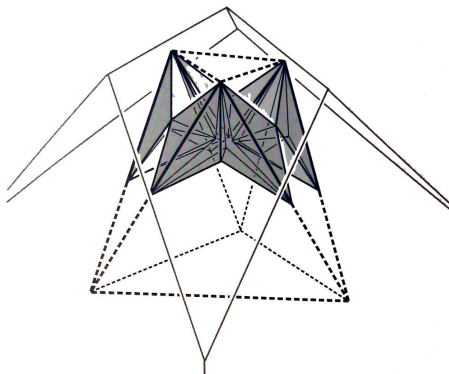
Der Gürtel nimmt hier die Hälfte des Körpervolumens ein, die beiden identischen Riegelkörper jeweils ein Viertel. Die Riegel liegen sich gegenüber, jedoch um 60° verdreht, genau wie die zwei gegenüberliegenden Flächenpole des Oktaeders.



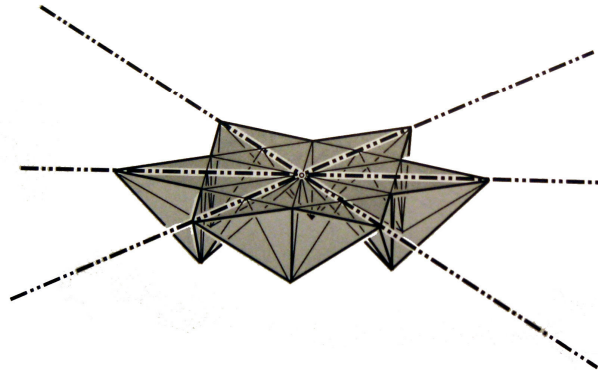
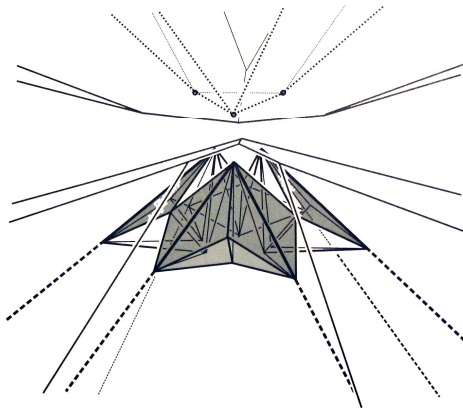
Das Oktaeder zeigt die perfekte Platonische Umstülpung. Alle Umstülpungsphasen sind deutlich erkennbar, sowohl die Involutionbewegung als auch die Evolutionsbewegung lassen sich gut beobachten. In den folgenden Abbildungen wurde jeweils der polare Körper, der Würfel, mit eingezeichnet.



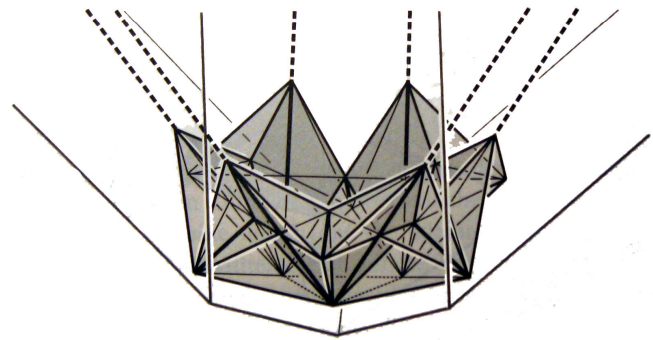
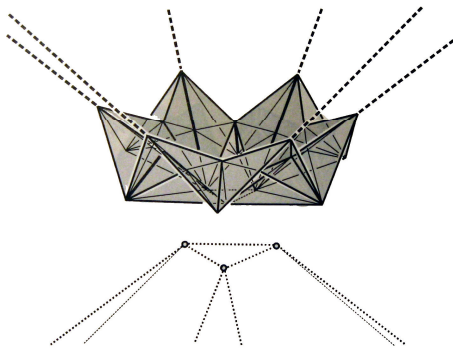
Der Oktaedergürtel (oben links) wird durch die gestrichelten Linien zum ideellen Oktaeder ergänzt. Rechts hat die Umstülpungsbewegung gerade begonnen, man sieht, wie die unteren Segmente sich auseinanderbewegen und die Eckpunkte des ideellen Körpers dadurch weiter nach unten wandern.



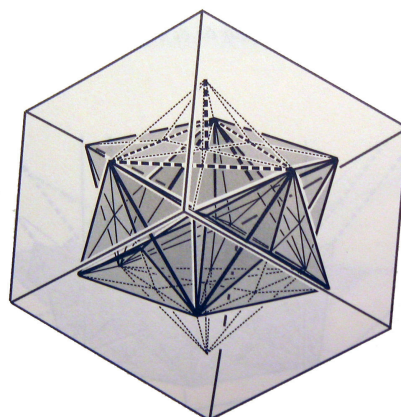
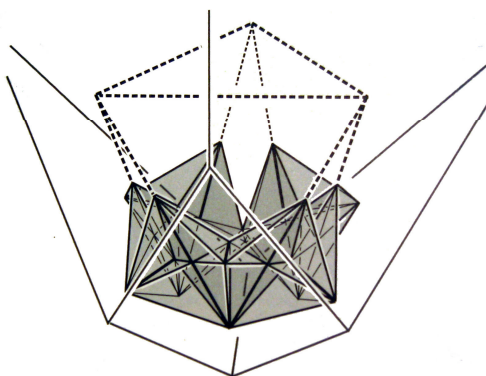
Im weiteren Verlauf der Umstülpbewegung wandern die Eckpunkte immer weiter nach unten, das Volumen des ideellen Körpers wird so immer größer (oben links). Schließlich liegen die drei Kantenpaare, die vorher durch den Schnitt ihrer gedachten Verlängerungen die Eckpunkt erzeugt haben, parallel zueinander – die Eckpunkte liegen als im „Unendlichen“ bzw. in der projektiven Fernebene. Diese Phase der Umstülpung entspricht dem ersten Unendlichkeitsdurchgang der einen Körperhälfte.



Die ins Unendliche verschwundenen Eckpunkte wandern nun – als gedachte Elemente – wieder von oben ins Bild. Das Volumen des gedachten Oktaeders ist nun unendlich groß (oben links). Schließlich liegt die gesamte Oberfläche flach in einer Ebene – man nennt dies den Ebenendurchgang (oben rechts).



Nach dem Ebenendurchgang wenden sich nun die Oberflächenteile nach Innen. Jeweils zwei Segmente bleiben dabei zusammen, ihre Flächenmitten-Verbindungsstellen bleiben unbewegt (oben links). Es folgt der zweite Unendlichkeitsdurchgang der einen Körperhälfte (oben rechts). Danach liegen wieder alle Eckpunkte „auf der selben Seite“, das heißt, das Volumen des ideellen Körpers ist wieder endlich, wie man im Bild links unten erkennen kann. Es ergibt sich dann die Negativform, ein Oktaeder mit dreiseitigen Pyramiden auf den Flächen, in dessen Innern wieder das ursprüngliche Oktaeder als Hohlkörper vorliegt. Im Bild wurden die ergänzenden Riegel nur durch gestrichelte Linien angedeutet.



4. Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde nun ein Überblick über die Grundlagen der Umstülpung gegeben mit besonderer Beachtung der Konstruktionsprinzipien, wobei der Schwerpunkt hauptsächlich auf der Platonischen Umstülpung nach Maas und Sykora lag. Neben dieser und der Umstülpung mit Zwangslauf nach Ernhofer gibt es noch ein weiteres Konzept, auf das hier nicht näher eingegangen wurde, nämlich das der ganzheitlichen Umstülpung. Bei diesem Ansatz wird versucht, den gesamten Körper in die Umstülpung mit einzubeziehen, also insbesondere keine Riegelkörper zu entnehmen. Dabei werden einige Grundsätze, wie sie bei der Platonischen Umstülpung gefordert werden, unerfüllbar. Mit dieser Art der Umstülpung haben sich unter anderem Hartmut Endlich und Naoki Yoshimoto beschäftigt.

Auf dem gesamten Gebiet der Umstülpung sind noch viele Fragestellungen offen, darunter die Frage nach der Verwertbarkeit der Ergebnisse. Im Falle der zwangsläufigen Ringe gibt es bereits die technische Anwendung in Mischmaschinen. Ob und wie andere Ringe sich so verwerten lassen, ist noch nicht ausreichend belegt.

In jedem Fall stellen Umstülpungskörper eine gute Möglichkeit zur Schulung der räumlichen Vorstellung dar. Man kann an ihnen die Geometrie der Platonischen Körper erleben und dabei immer wieder einen Blick auf Momente des Nicht-mehr-Vorstellbaren werfen, wenn gedachte Punkte immer weiter nach außen wandern und schließlich im „Unendlichen“ verschwinden, um dann „auf der anderen Seite“ wieder in Erscheinung zu treten. Gerade in der Projektiven Geometrie wird viel mit gedachten (da nicht im Endlichen liegenden) Elementen gearbeitet. Das Studium der Platonischen Umstülpungskörper kann mit seinen Unendlichkeitsdurchgängen eine Hilfe zum Einstieg und besseren Verständnis bieten.

Literatur- und Quellenverzeichnis:

K. Ernhofer, W. Maas: *Umstülpbare Modelle der Platonischen Körper*, Mathematisch-Astronomische Sektion der Freien Hochschule für Geisteswissenschaften am Goetheanum, Dornach (Schweiz), 2000

R. Byrnes: *Metamorphs – Transforming Mathematical Surprises*, Tarquin Publications 2004

Renatus Ziegler: *Platonische Körper - Verwandtschaften, Metamorphosen, Umstülpungen*, Mathematisch-Astronomische Sektion der Freien Hochschule für Geisteswissenschaft am Goetheanum, Dornach (Schweiz), 1998

Wolfgang Maas & Immo Sykora: *Umstülpmodelle der Platonischen Körper*, Werkstatt für Platonische Körper, Kaspar Hauser Therapeutikum, Berlin, 1993.