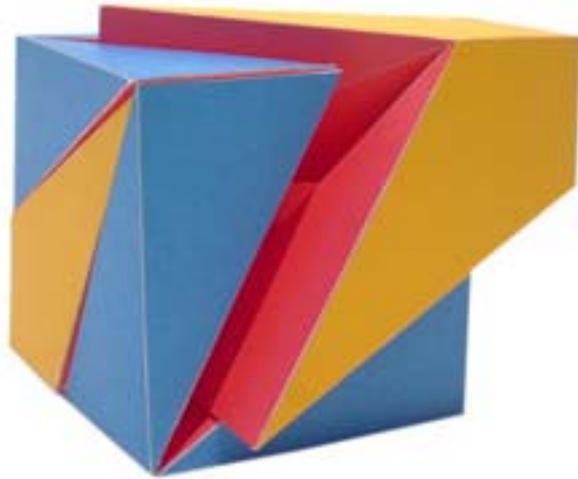


Umstülpungen



*Seminar: Geometrische Raumstrukturen
Sommersemester 2005*

Margarita Ehrlich

Definition

Umstülpung ist eine Veränderung der Grundform. Man kann diese durch Wachstum, Variation oder Verwandlung umgestalten. Insbesondere muss man beachten, dass bei einer Umstülpung zwei Kräfte oder Formtendenzen vorhanden sind, die zusätzlich ihre gegenseitige Wirkungsrichtung im Raum ändern.

Definition: Wenn das Innere eines Körpers nach außen gestülpt wird oder das äußere nach innen, spricht man von einer Umstülpung.

Anwendung

Der Begriff Umstülpung kommt auch in der Biologie vor. Hier wird dieser Begriff für die Beschreibung der embryonalen Entwicklung bei der Grünalge *Volvox* verwendet. Ferner finden bei der Entstehung der menschlichen Organe immer Ein- und Ausstülpungen statt (Bildung des Neuralrohres des Auges oder des Darmes). In Biologie finden die Umstülpungsprozesse ohne Mitwirkung der gestaltbildenden Kräfte statt. Den Begriff findet man außerdem in der Anthroposophie wieder. Die Anthroposophie (wörtlich die Weisheit vom Menschen, von Rudolf Steiner (27.02.1861-30.03.1925) begründet) versteht sich als eine christliche und humanistische Methode der Bewusstseinsentwicklung. Die Impulse, die von der Anthroposophie ausgehen, umfassen unterschiedliche Lebensbereiche wie z.B. Pädagogik/Heilpädagogik (Waldorfschule), Medizin, Landwirtschaft.



Beispiele:
Inversis latros, Würfel der Wandlung, Triamant

Entdeckung

Im Jahre 1927 entdeckte Raoul Bricard (1890-1943) eine sechsgliedrige zwangläufige Gelenkkette. Er hat diese Kette nicht weiter untersucht, sondern nur darauf hingewiesen, dass diese verallgemeinert werden kann.

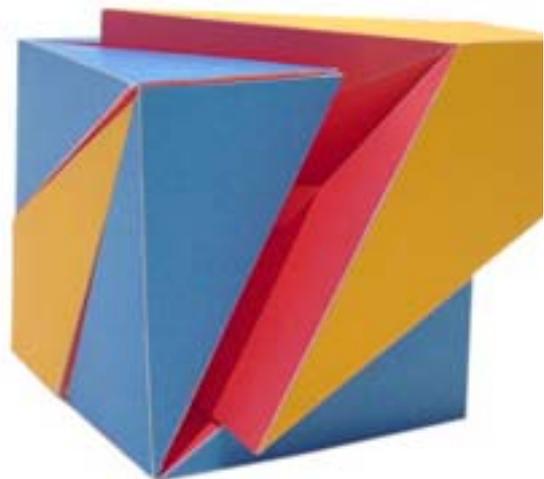
Erst im Jahre 1929, ohne die Bricardsche Arbeit zu kennen, entdeckte Paul Schatz (1898/Konstanz - 1979/Dornach) die Umstülpbarkeit der platonischen Körper. Paul Schatz war Mathematiker, Maschinenbauer, Bildhauer und ein genialer Entdecker. Schon als Schüler bekam er den Graf-Zeppelin-Preis für die besten Leistungen in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern. Enttäuscht von der Enge der Wissenschaft brach der junge Paul Schatz 1922 sein Studium in Mathematik, Maschinenbau, Philosophie und Astronomie ab und startete eine Ausbildung zum Holzbildhauer an der Holzschnitzschule. 1924 bis 1927 arbeitete er als Plastiker im eigenen Atelier und begegnete dort der Anthroposophie. Daraufhin zog er mit seiner Familie nach Dornach, wo er 1929 bei geometrischen Experimenten die Gesetze der Umstülpung platonischer Körper und die Inversionskinematik entdeckte. Bei dem Versuch, die Fünfeckflächen des Pentagondodekaeders ohne Kreuzung des Weges in einem Zug nachzufahren, stellte er fest, dass das nur durch die Auffaltung der Oberfläche möglich ist. Er schloss das aus der aufgefalteten Fläche entstandene Band und bemerkte die Beweglichkeit der Teilflächen an ihren Rändern (Gelenken). Diese Beweglichkeit ermöglichte eine Wendung (Umstülpung) des Ringes.



Paul Schatz



Paul Schatz in seinem Atelier

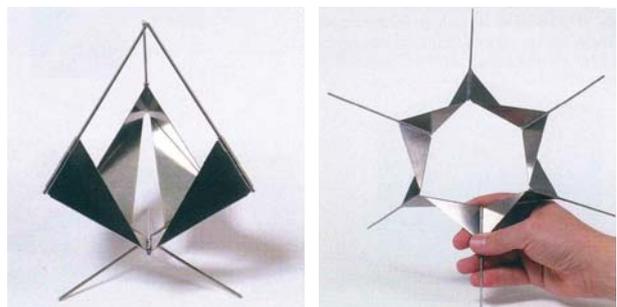
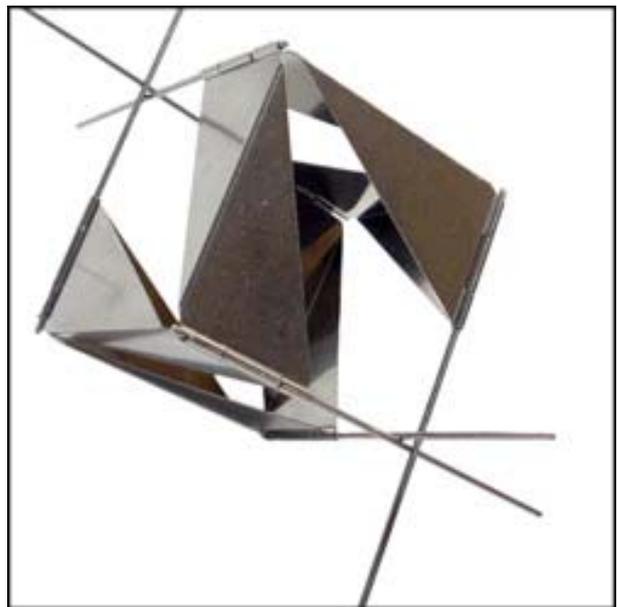


Umstülpbarer Würfel Von Paul Schatz

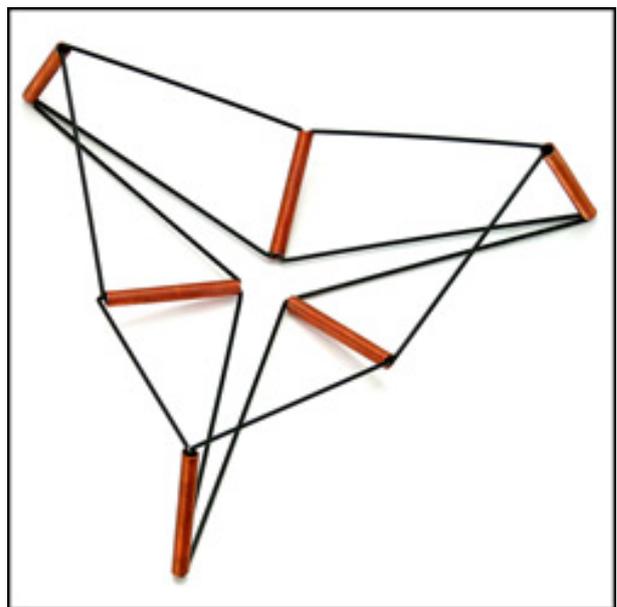
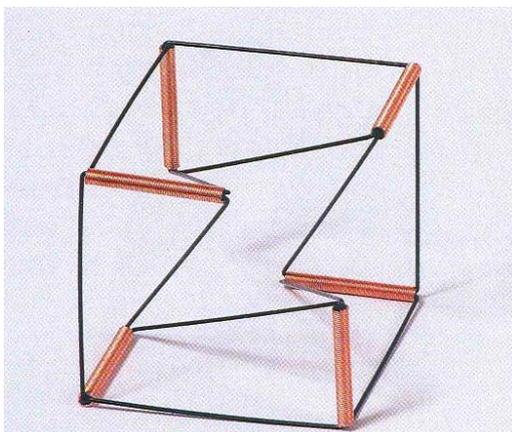
Das Verfahren den umstülpbaren Würfel herzustellen besteht in der Reduktion des Würfelvolumens auf ein Drittel seiner ursprünglichen Größe. Dies geschieht durch das Aufschneiden des Würfels an zwei gegenüberliegenden Ecken, die durch eine Raumdiagonale verbunden sind. Es entstehen zwei Sternkörper und ein Würfelgürtel. Entfernt man die Sternkörper, lässt sich der Gürtel stülpen. Der Würfelgürtel besteht aus zwei mal drei, paarweise spiegelbildlich gleichen Gliedern, die durch Gelenke verbunden sind. Es entsteht eine zwanghafte, rhythmische Bewegung, die als Pulsieren wahrgenommen wird.

Es gibt 3 Möglichkeiten umstülpbaren Würfel von Schatz darzustellen:

1. Zwei Riegel und eine Gelenkkette: diese figurieren als feste Körper.
2. Mit verlängerten Kanten: dadurch erreicht man, dass „Ebenendurchgang“ und „Unendlichkeitsdurchgang“ besser wahrgenommen werden.
3. Modell der Gelenkkette: Welches durch die Reduktion auf je zwei Kanten pro Tetraeder entsteht. Die dabei entstandene Transparenz verdeutlicht die Innen- bzw. Außenübergänge.



Umstülpbare Würfel mit verlängerten Kanten



Modell der Gelenkkette

Formverwandlung in dem umstülpbaren Würfel von Schatz

Beim langsamen drehen des Würfels sind zahlreiche rhythmische Abfolgen von Umstülpungen zu sehen:

1. Würfel, Materie im Würfel angeordnet.

2. Kugel (Annäherung), Facettenkugel-Segment klein, Außenansicht.

3. Dreieck, Materie im Dreieck, Ebenenansicht.

4. Kugel, Facettenkugel-Segment, groß, Innenansicht.

5. Würfel, hohl, von vorne und unten offen, seitlich und oben unvollständig von Materie umgeben.

6. Dreieck, hohl, Spitze unten.

7. Würfel, Hohl, Blick auf imaginäre Vorderkante.

8. Dreieck, hohl, Spitze oben.

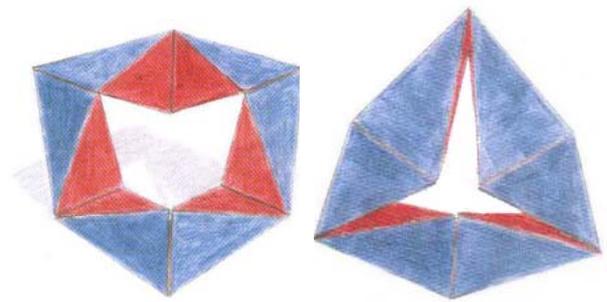
9. Würfelhüllform.

9a. Würfelhüllform mit imaginärem Würfel.

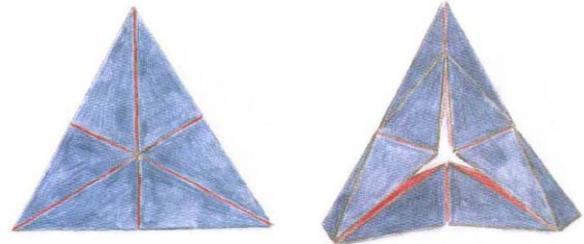
9b. Würfel (Rückansicht), hohl, nach vorne und oben offen.

10. Kugel, Facettenkugel-Segment, groß, Aufsicht.

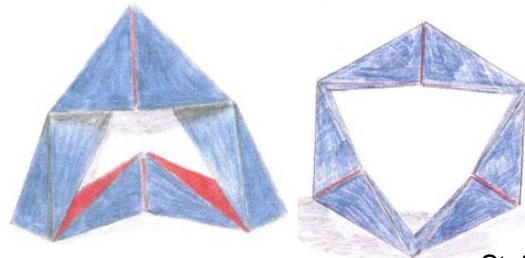
11. Dreieck, Materie im Dreieck, prismatischer Anblick.



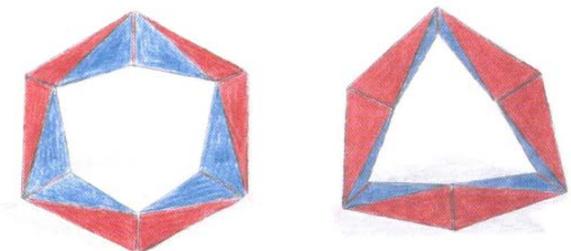
Stufe 1-2



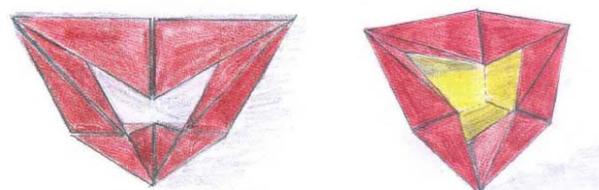
Stufe 3-4



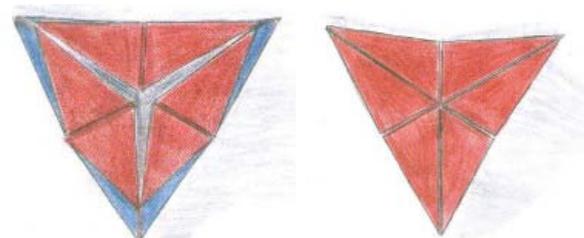
Stufe 5-6



Stufe 7-8



Stufe 9,9a



Stufe 9b-10

12. Kugel, Facettenkugel-Segment, klein, Innenansicht.

13. Würfel, Materie im Würfel, Stufe 1 wiederholt sich bei Stufe 13.

Polaritäten

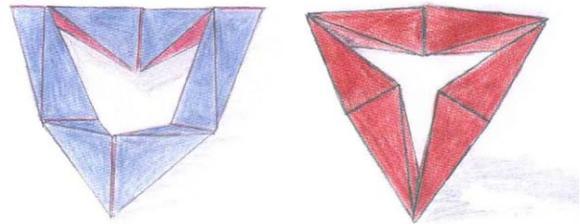
Durch diese Formverwandlungen werden 7 folgende Polaritäten erlebbar

1. Würfel - Kugel
2. Materiell – Immateriell (hohl)
3. Oben – Unten
4. Vorne – Hinten
5. Punkt – Raum
6. Begrenzte Fläche (z.B. ebenes Dreieck) – Unendlichkeit (z.B. Kanten weisen parallel ins Unendliche)
7. Außenansicht – Innenansicht

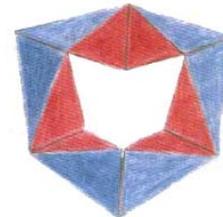
Technische Anwendung

Heute erreichen Maschinen, basierend auf der Umstülpungserfindung, beim Mischen und Mahlen, Rühren und Umwälzen optimale Resultate bei einem minimalen Energie-Aufwand. Mischmaschine „Turbula“ und „Inversina“ sind weltweit bekannt geworden wegen ihrer effektiven, schnellen und zugleich schonenden Mischweise in Technik und Industrie.

In der «Turbula» und ihrem Konkurrenzprodukt der «Inversina» werden heute neben zahlreichen Mischvorgängen in Behältern, mit einem Fassungsvermögen bis zu 500 l, auch Schleif- und Mahlprozesse durchgeführt. Der Grund: die in der Würfelstruktur vorhandene, taumelnde Bewegung, die nicht gleichförmig, sondern rhythmisch-pulsierend ist, erweist sich bei vielen Prozessen rotierenden Bewegungen überlegen. Es gibt auch eine weitere Maschine die sogenannte „Swing“, die ebenfalls verschiedene Einsatzmöglichkeiten in der Industrie anbietet.



Stufe 11-12



Stufe 13



Turbula



Inversina

Weitere Entwicklungen der Umstülpungen

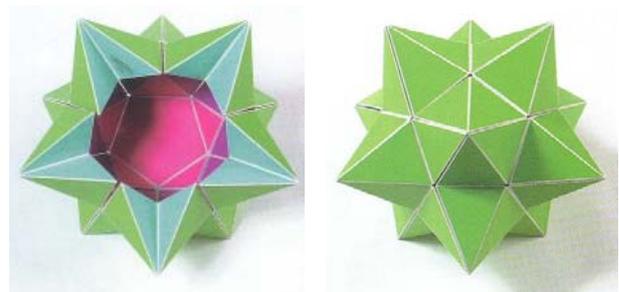
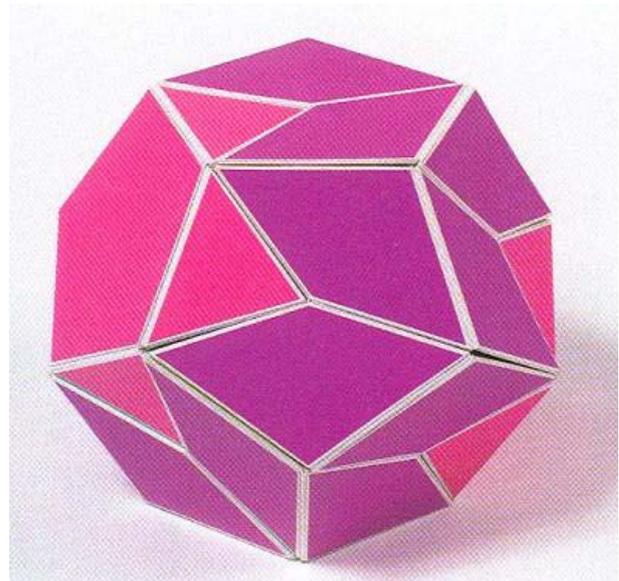
In den letzten dreißig Jahren entstand eine Reihe ganz unterschiedlicher geometrischer Modelle, deren Erfinder den Begriff der Umstülpung für ihre Erfindung in Anspruch nahmen. Oft begannen Entwicklungen an verschiedenen Stellen gleichzeitig und scheinbar unabhängig voneinander. Andererseits hat ein und derselbe Umstülpungskörper Entwicklungen verschiedener Art angeregt. Im Wesentlichen sind es vier Umstülpungsvarianten: Platonische Umstülpung, Zwangsläufige Ringe in Platonischen Körpern, „Ganzheitliche“ Ringe und Entwicklungen aus der Zusammenfügung von Teilkörpern.

1. Platonische Umstülpung

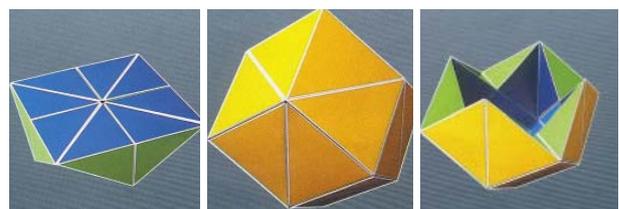
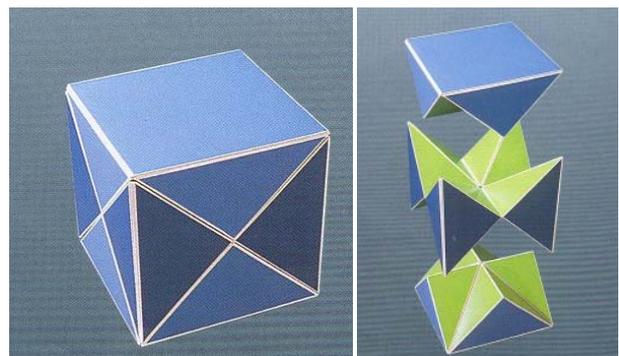
Immo Sykora wurde durch den umstülpbaren Würfel von Schatz, den er im Jahre 1973 gesehen hat und dann später aus dem Gedächtnis nachgebaut, zu weiteren Untersuchungen von Umstülpungen angeregt. Er und seine Familie (Bruder Franz, Sohn Friedemann) als auch Wolfgang Maas, Robert Byrnes haben danach weitere Umstülpmöglichkeiten der platonischen Körper untersucht.

Das Modell von Konrad Schneider, ein Würfelmodell mit Gelenken in den Symmetrieachsen, ist hier wichtig zu erwähnen. Dessen Achsenanordnungen bekräftigen das von Familie Sykora bevorzugte System mit folgenden Eigenschaften:

- Die Anzahl und gegenseitige Wirkung der geometrischen Elemente (Flächen, Kanten, Ecken) im Ausgangskörper sollen im Umstülpungsprozess erhalten bleiben. Daraus folgt, dass der aus dem ursprünglichen Platonischen Körper hervorgehende, durch den beweglichen



Pentagondodekaeder von Maas



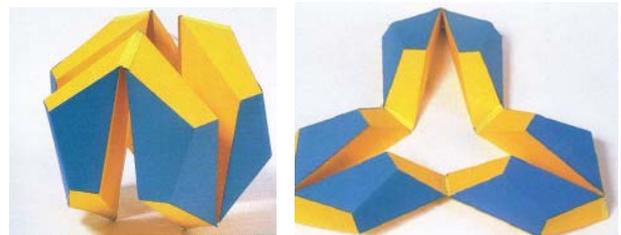
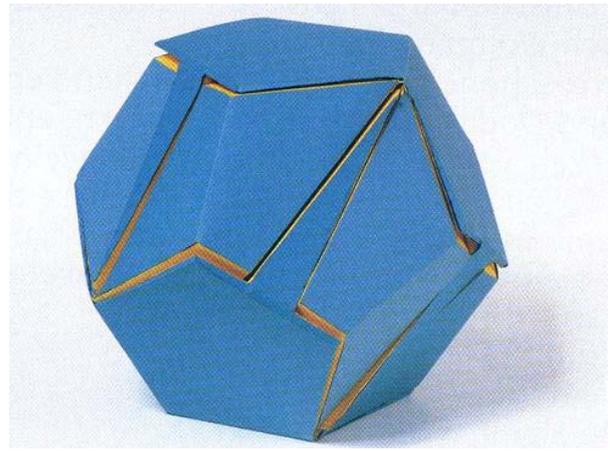
Der Würfel von Schneider

Modellkörper induzierte (ideelle) Körper sich in jeder Umstülpungsphase der kontinuierlichen, zyklischen Bewegung aus den Eigenschaften des Modellkörpers eindeutig ableiten lässt

- Durch die Umstülpung des Ausgangskörpers entsteht charakteristisches, sternförmiges Gebilde mit einem Hohlraum in Form des ursprünglichen Körpers. Das Innen und Außen vertauschen relativ zur Oberfläche des Körpers ihre Rolle.

- Bei der Umstülpung gehen einige Eckpunkte des (ideellen) Körpers in das Unendliche. Der ganze Raum wird in die Umstülpung miteinbezogen.

- Alle Flächenneigungswinkel verwandeln sich über einen vollständigen Ebenendurchgang zu dem Komplement des Vollwinkels.



Pentagondodekaeder von Ernhofer

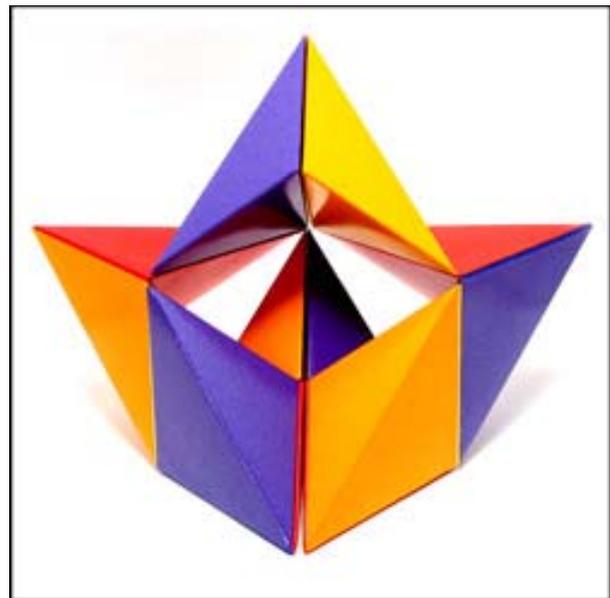
2. Zwangsläufige Ringe in Platonischen Körpern

Klaus Ernhofer entwickelte eine weitere Idee, die in dem umstülpbaren Würfel vorhanden ist nämlich Sechsgliedrigkeit und damit den Zwanglauf. Er übertrug das auf die anderen platonischen Körper, welche potentiell technisch verwendbar sind.

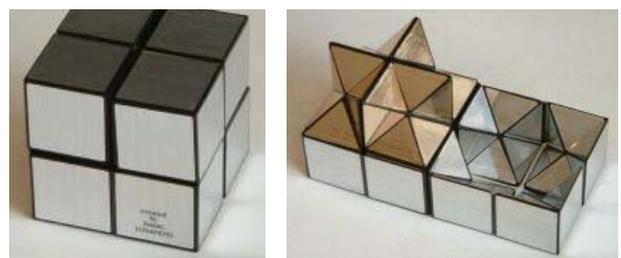
3. „Ganzheitliche“ Ringe

Der Bildhauer Naoki Yoshimoto entwickelte 3 Würfel, bei denen keine Riegel entnommen werden und alle Teile in einem (oder zwei) Ring(en) verbunden sind.

Hartmut Endlich hatte ähnliche Lösungen gefunden. Er gliederte die platonischen Körper in kongruente Teile ein und verband sie vollständig zu geschlossenen Gelenkringen. Im Gegensatz zur Idee von Sykora ist „Ganzheitlichkeit“ in Modellen von Endlich die Summe der im Umstülpungskörper vorliegenden



Cubus X



Yoshimoto Würfel

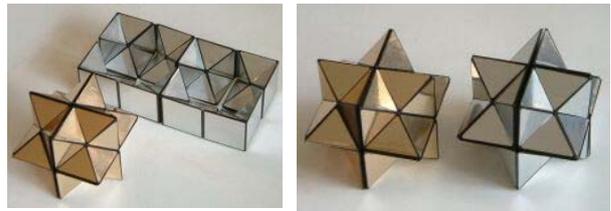
Glieder. Für ihn ist es nicht von Bedeutung in allen Umstülpungsphasen einen platonischen Körpers zu erhalten (Beispiel: CubusX).

4. Entwicklungen aus der Zusammenfügung von Teilkörpern

Mathematikerin Doris Schattschneider und der Grafik-Designer Wallace Walker arbeiteten mit Aneinanderreihung gleicher, einfach zu faltender tetraederschen Gliedern. Solche Ketten werden mit Kaleidozyklen bezeichnet. Der umstülpbare Würfel von Schatz entspricht einem Viertel des sechsgliedrigen Kaleidozyklus.

Die Polysomatische Gestaltung

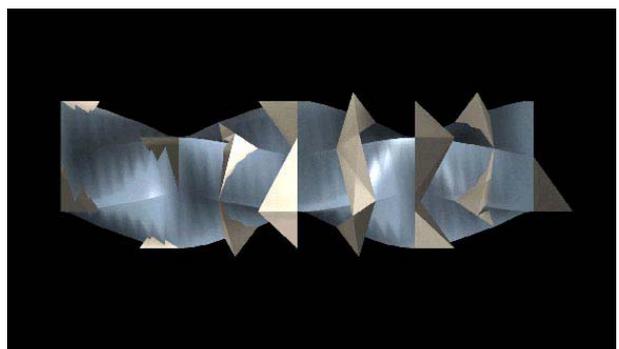
Das Wort Polysom entstand in Analogie zu den Begriffen Polygon und Polyeder. Das Polygon ist ein ebenes Gebilde, bestehend aus linearen Elementen. Dabei liefern Eindimensionale Bestandteile Figuren im Zweidimensionalen. Der Polyeder setzt sich zusammen aus Elementen der Ebene, die sich in den Raum erheben und damit Körper im Dreidimensionalen bilden. Polysome werden aus Elementen des Raumes erzeugt, die sich in die nächst höhere Dimension erheben. Bei der polysomatischen Gestaltung handelt es sich um eine zur Ruhe gebrachte Bewegung, also die von dem Polysom bei der Umstülpung im Raum beschriebene Form. Diese Form wird nicht durch eine Gerade oder eine Kurve erzeugt sondern gleichzeitig von mindestens zwei gesetzmäßig gegeneinander schwenkbaren beweglichen Erzeugenden, die bestimmten Hüllflächen zugrunde



Yoshimoto Würfel



Kaleidozyklen



Polysomatische Gestaltung (Seminar TU Berlin)

liegen. Diese durch die Umstülpung entstandenen Gebilde werden von Paul Schatz Kuboide genannt.

Der halbe Polkuboid entsteht durch die Fixierung des Würfelgürtels an einer Raumecke in der Stellung des Ebenendurchgangs. Dieser weist einen dreieckigen Grundriss auf. Um diese Raumecke wird der Würfel gestülpt, wobei die Bewegung der Kanten im Raum festgehalten wird. Besondere Merkmale sind die doppelte Symmetrie sowie die markanten Formen von Kreis und Dreieck, die bei entsprechenden Schnitten in Erscheinung treten.

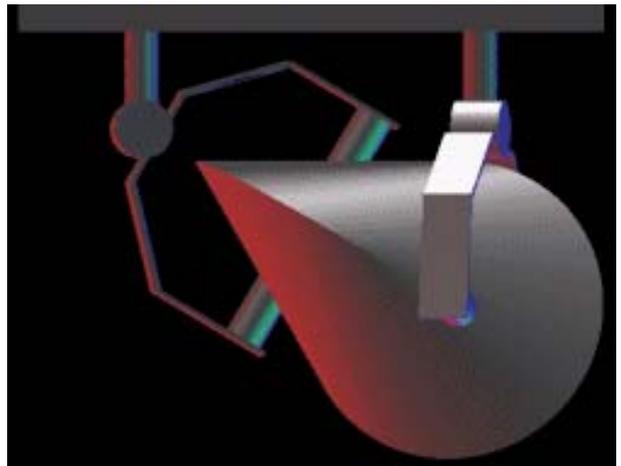


Polkuboid

Beispiele

Das Oloid

Das Oloid ist eine Raumschweifkurve der Bewegung aus dem „Schatz Würfel“. Es ist von gekrümmter Fläche eingefasst, die aber aus geraden Linien besteht. Es handelt sich also um eine abwickelbare Oberfläche, welche man knickfrei aus einem Stück steifen Papiers herstellen kann. Obwohl es die zwei Halbkreise als scharfe Kanten hat, poltert es nie über diese hinweg, sondern rollt immer über seine glatte Oberfläche.



„Oloidverwendung“



Oloid

Inversis Sphäre Lehr von Ernst Lehr entwickelt:

Die umstülpbare Kugel ist ein räumliches Gebilde aus Yin-Yang-förmigen Lamellen, die eine organisch anmutende Umstülp-Bewegung durchläuft.



Inversis Sphäre

Facettenkugel „-Dodekaeder:

Entsteht durch Verbindung von Inversis Schatz-Modellen in den Stufen 2 und 12 der Umstülpung.

**Grosse „Facettenkugel“
(Ikosidodekaeder):**

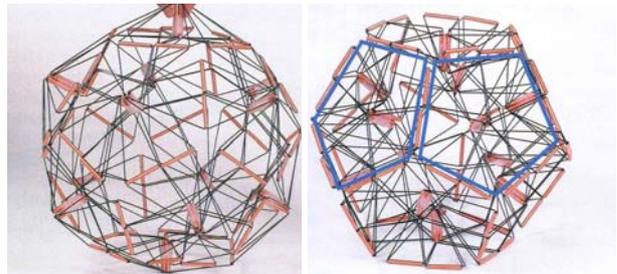
Entsteht aus Inversis Schatz-Modellen in den Stufen 4 und 10 der Umstülpung, mit hohlem Pentagondodekaeder im Inneren.

Kleine „Facettenkugel“:

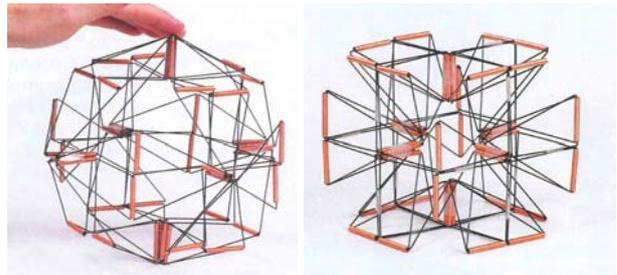
Entsteht aus Inversis Schatz-Modellen in der Stufe 9 der Umstülpung.

Grosser Würfel:

Entsteht aus acht Inversis Schatz-Modellen, im Inneren liegt ein hohler Sternkörper.



„Dodekaeder“ und „Ikosidodekaeder“



Kleine „Facettenkugel“ und grosser Würfel

Literatur- und Quellenverzeichnis:

Renatus Ziegler; Platonische Körper
- Verwandtschaften, Metamorphosen, Umstülpungen; Herausgegeben von der
Mathematisch-Astronomischen Sektion der
Freien Hochschule für Geisteswissenschaft
am Goetheanum, Dornach (Schweiz);
1998

Wolfgang Maas & Immo Sykora;
Umstülpmodelle der Platonischen Körper;,
Werkstatt für Platonische Körper, Kaspar
Hauser Therapeutikum, Berlin; Jahr 1993
Umstülp-Zeit Einführung in den Umgang
mit Umstülp-Phänomenen und Umstülp-
Objekten, Kulturata e.V., Wuppertal, Durch
Peter Schottler, 2004

Klaus Ernhofer, Wolfgang Maas;
Umstülpbare Modelle Der Platonischen
Körper. Mathematisch-Astronomische
Sektion der Freien Hochschule für
Geisteswissenschaften am Goetheanum,
Dornach (Schweiz), 2000

www.paul-schatz.ch

www.mathematische-basteleien.de

www.kaleidocycles.de