

LES TAS DE SABLE AU CLUB... SCIENTIFIQUE

Francis JAMM

Lycée LAVOISIER MULHOUSE

L'Ouvert a déjà publié de nombreux articles mathématiques, notamment sous la plume de Roger ISS, sur les tas de sables. Francis JAMM éclaire ici un autre aspect directement lié à la vie des tas de sables dans une classe de Lycée pendant un club de mathématiques. Comme le souligne en expert, Roger ISS: « *L'intérêt essentiel de cet article est la publicité que cela peut faire à ces clubs scientifiques et à la qualité des résultats qu'ils peuvent obtenir. Peut-être, Francis JAMM n'insiste pas assez sur l'étonnant palmarès obtenu par son club : finir à Paris à la fête de la Science, c'est extraordinaire !* »

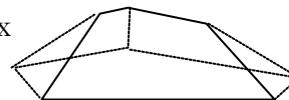
Septembre 2000, première séance du Club Scientifique du lycée Lavoisier de Mulhouse... Devant le professeur, quelques plaques de carton... Il prend une plaque, la pose sur un petit socle et verse du sable jusqu'à ce qu'il déborde de tous les côtés de la plaque. Puis il réitère l'opération avec d'autres plaques.

Une phrase : « Quelles questions peut-on se poser ? »

Et puis, plus rien... si ce n'est la moue dubitative des élèves qui pensent que le soleil a vraiment frappé très fort cet été. Et pourtant, c'est ainsi, qu'a débuté un travail de recherche qui a duré un an, sans arriver à épuiser le sujet !

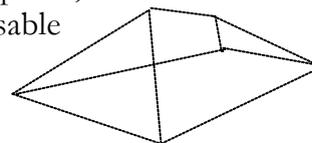
Séance 1 : UNE QUESTION ?

Curieusement les élèves commencent à s'intéresser aux plaques pentagonales. Ils me diront plus tard qu'ils pensaient que le cas des quadrilatères était trop simple.



Avec une plaque pentagonale on observe toujours le même tas de sable. À savoir une face pentagonale entourée de deux triangles et de deux quadrilatères.

Ne voyant pas bien quelles questions on pouvait se poser, ils reviennent aux quadrilatères. Là aussi on observe toujours le même tas de sable ayant pour faces deux quadrilatères et deux triangles non consécutifs.



Les premières questions arrivent :

« — Peut on avoir deux triangles consécutifs ?

— Dans le cas d'un parallélogramme, peut-on calculer la longueur de l'arête faîtière ? »

En effet les tas obtenus possèdent une arête faîtière.

D'où une nouvelle question : « Qu'est ce qui détermine l'orientation de cette arête ? »

Séance 2 : LE TRAJET D'UN GRAIN DE SABLE

Ceci les amène à se poser la question : « Comment se forme un tas de sable ? »

Ceci nous amène à faire quelques hypothèses, de nature physique, liées à l'observation. Elles nous serviront d'*axiomes* qui nous permettront de modéliser la réalité physique.

1) L'angle que fait la pente de sable avec la base est constant. Il dépend de la granulométrie du sable. Nous le mesurerons, environ 30° .

2) Une fois que la plaque déborde, les grains de sable glissent vers le bord le plus proche de leur point de chute.

3) Les faces sont donc séparées par des arêtes situées à égale distance des deux bords.

Puis, nous démontrerons, qu'en projetant les arêtes sur la plaque on obtient les bissectrices des angles formés par les bords de la plaque.

Maintenant on est capable de prévoir la forme d'un tas de sable.

En prenant une plaque trapézoïdale, l'arête faîtière **semble** parallèle à la plaque, et on obtient des faces qui **semblent** être des trapèzes. Mais, devant l'absence de certitude qu'engendre l'observation d'un tas de sable, s'impose spontanément, la nécessité de **démontrer**, afin d'avoir des **certitudes** et de pouvoir aller de l'avant.

Nous allons dorénavant travailler sur des tas de sable *idéaux*; mais avec un retour constant vers la réalité physique; que ce soit pour conforter notre modèle, ou trouver de nouvelles idées.

Par exemple, après l'avoir observé, nous démontrerons qu'il y a toujours, au moins, deux faces triangulaires et qu'elles ne peuvent pas être adjacentes.

Séance 3 : LES PYRAMIDES DE SABLE

Les élèves semblent avoir compris ce qui se passe avec un quadrilatère pour base.

Mais j'apporte des plaques, qui, oh surprise, engendrent un tas pyramidal (sans arête faîtière).

On comprend rapidement que les pyramides apparaissent quand les 4 bissectrices sont concourantes, c'est-à-dire quand le quadrilatère admet un cercle inscrit. Les élèves se posent alors une nouvelle question : «Quelle condition doivent vérifier les côtés et les angles de la plaque pour que l'on obtienne un tas de sable pyramidal ? »

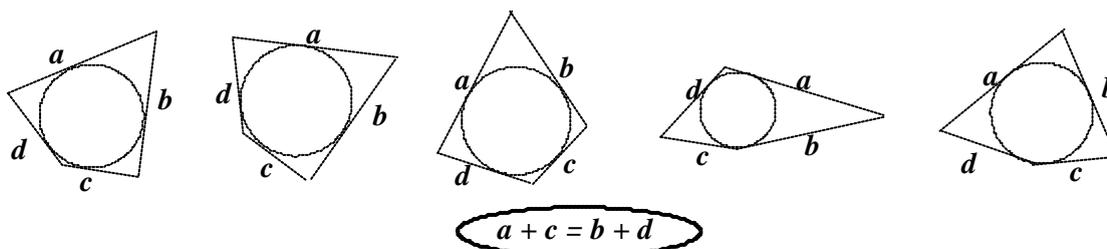
Séance 4 : ON COGITE

Recherche infructueuse de la condition. On considère le quadrilatère complet et on essaye d'utiliser un peu toutes les formules classiques dans le triangle (rayon du cercle inscrit etc.) En vain.

Séance 5 : LE THÉORÈME DE LA PYRAMIDE

David se souvient d'une question du Kangourou où l'on demandait : «Si ABCD est un quadrilatère convexe admettant un cercle inscrit a-t-on $AB + DC = AD + BC$? »

La condition, nécessaire, est-elle suffisante ? Nous fabriquons quelques plaques vérifiant cette condition. Elles engendrent bien des pyramides. Ceci nous stimule pour chercher une démonstration.



Séance 6 : ON PROUVE

David arrive avec une démonstration. Soit O le point d'intersection de 3 bissectrices. Il calcule la distance de O aux côtés de la plaque, et montre que O est équidistant des 4 côtés.

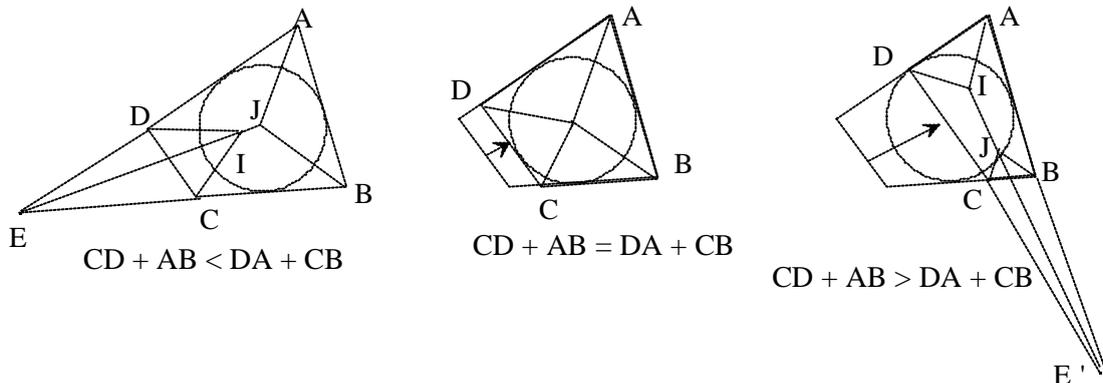
Afin de pas ne pas être en reste, j'apporte aussi une démonstration. Je montre que les projetés orthogonaux de O sur les 4 côtés sont cocycliques en faisant intervenir le théorème de l'angle inscrit. Des mois plus tard David trouvera une démonstration plus simple dans un livre d'entraînement aux Olympiades Internationales. Il généralisera cette étude aux plaques à n côtés.

Nous avons maintenant une étude complète de la position de l'arête faîtière.

Séance 7 : QUE DE TAS, QUE DE TAS...

Après avoir épuisé les joies des plaques à quatre côtés, nous passons aux bases hexagonales.

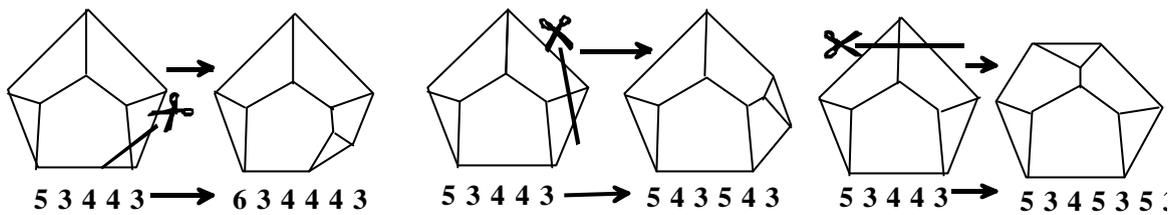
Là une grosse surprise nous attend. Nous trouvons trois types de tas de sable.



Existe-t-il d'autres cas ? Nous décidons de nommer chaque cas par une formule indiquant le nombre de côtés de chaque face et leur succession. Pour chaque cas, plusieurs formules sont possibles. Par exemple pour le cas 2 (voir infra) on aurait pu noter 354354. De toutes les formules possibles nous retenons celle qui forme le nombre le plus grand.

La question est maintenant de trouver tous les tas de sable, donc toutes les formules possibles, en fonction du nombre de côtés de la plaque. Yves trouve qu'en coupant le coin d'une plaque à n côtés on obtient une plaque à $n + 1$ côtés. Réciproquement, toute plaque à $n + 1$ côtés peut s'obtenir en coupant le coin d'une plaque à n côtés. Nous partons du pentagone et obtenons ainsi, en travaillant uniquement sur les formules, la liste des différents tas de sable possibles.

- À savoir
- 3 cas pour une plaque hexagonale,
 - 4 cas pour une plaque heptagonale,
 - 12 cas pour une plaque octogonale *etc.*



Justement, le nouveau problème réside dans le *etc.*

Car cette méthode par récurrence devient vite pénible (27 cas pour une plaque ennéagonale et 82 pour une plaque décagonale !)

D'où la nécessité de chercher une méthode directe.

Séance 8 : DU CÔTÉ DES GRAPHES

Nous essayons d'abord de générer tous les formules, avec une arborescence,

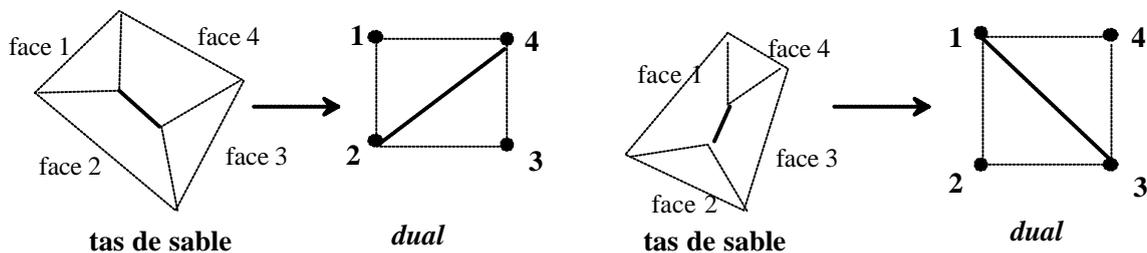
Il nous semble, alors, approprié d'utiliser une structure de graphe. Mais nos connaissances dans ce domaine étant nulles nous abandonnerons cette voie élégante et prometteuse. Plus tard Yves reprendra cette idée en considérant l'arête faîtière. En effet les tas de sable se différencient par la forme de leur arête faîtière.

Dans le cas de l'hexagone, elle est constituée de 3 segments. Aux symétries près il n'y a que 3 façons de les disposer : ou ou (Y).

En effet, on démontre que le cas d'une arête faîtière triangulaire est impossible. Physiquement, signifierait que le tas de sable possède un sommet en forme de plateau. On peut continuer sur cette voie quand le nombre de côtés augmente. Mais le groupe était trop faible en programmation pour exploiter cette voie.

Séance 9 : LE DUAL ARRIVE

D'une de ses lectures, David nous amène l'idée du dual d'un polyèdre. Cette représentation permet de visualiser et de manipuler facilement les arêtes faîtières qui diffèrent d'un tas de sable à l'autre.

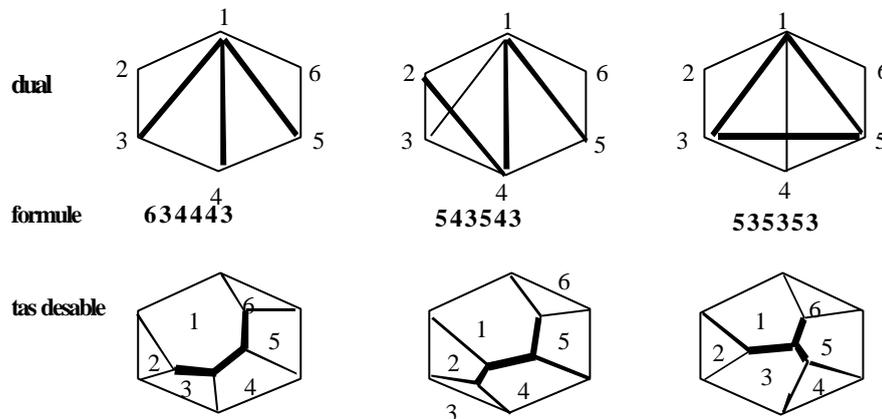


Séance 10 : L'ALGORITHME À LA MAIN

Reste maintenant, en travaillant sur cette représentation, à trouver un algorithme qui fournisse toutes les configurations.

Nous constatons que, quel que soit le nombre n de côtés de la plaque, on retrouve toujours un tas de sable ayant pour formule $n 3 4 \dots 4 3$. Or le dual de ce cas est remarquable. Toutes les diagonales partent du même sommet (au sens du dual). En

déplaçant ces diagonales, dans un ordre lexicographique, on trouve un algorithme qui permet, à la main, d'obtenir directement toutes les configurations possibles.



Séances 11 et 12 : DE LA MAIN À LA MACHINE

Nous allons améliorer l'algorithme, en évitant, grâce à des symétries évidentes, les répétitions inutiles. Par contre nous n'arriverons pas à obtenir les formules des tas de sable dans l'ordre; c'est à dire du plus grand nombre au plus petit.

Bien entendu, il faut informatiser cet algorithme. Nous n'y arriverons pas directement et nous «bidouillerons» un algorithme parallèle dans lequel les diagonales du dual seront implantées sous forme d'une pile. Le programme sera écrit en Turbo Pascal V4 (c'est dire !)

La DAO mieux que le sable

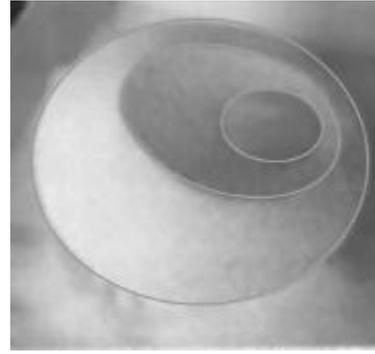
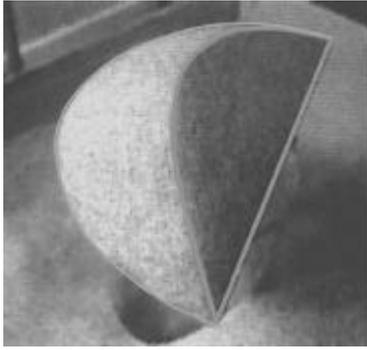
Dès que la plaque atteint sept côtés, il devient difficile de voir quelque chose sur le tas de sable. Nous intégrons alors dans l'équipe deux élèves de Première S, option SI, qui dans le cadre de leur TPE vont nous dessiner, en 3D, des tas de sable virtuels plus beaux et plus lisibles que les vrais. Pour ce faire ils utiliseront les moyens du bord, à savoir Solidworks, qui est un logiciel de DAO pour des pièces mécaniques. Ces dessins seront obtenus par troncatures successives. Ils représentent des vrais tas de sable, c'est dire que leurs arêtes sont les bissectrices des angles de la plaque.

Il nous semble avoir bien avancé dans le cas des plaques polygonales convexes. Pour ne pas saturer nous faisons, après Noël, une petite pause de 2 séances durant lesquelles nous parlerons d'algorithmes de tri.

Les coniques ou les ronds dans le sable

Nous nous attaquons à des plaques ayant des formes arrondies. Nous obtenons alors une superbe visualisation des coniques. Cela nécessitera de ma part un bref exposé sur ce que sont les coniques.

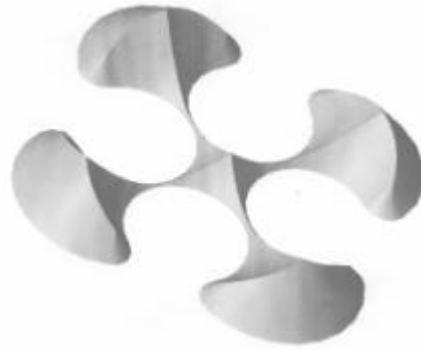
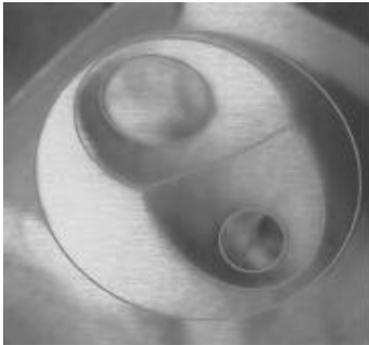
La **parabole** est obtenue avec une plaque en forme de demi-cercle. La pente de sable étant constante, l'arête apparaît comme l'intersection d'un cône et d'un plan, tous les deux faisant le même angle avec la plaque. On est donc dans le cas de l'intersection d'un cône avec un plan parallèle à la génératrice



L'**ellipse** est obtenue avec une plaque circulaire percée d'un disque excentré. Elle apparaît comme l'intersection d'un cône plein (de sable) et d'un cône creux (engendré par le trou). Les deux cônes ont même angle au sommet à cause des règles d'écoulement du sable.

Se pose alors la question : « L'intersection de deux cônes, c'est quoi ? » Nous allons d'abord devoir démontrer que l'intersection de deux cônes, de même angle au sommet, est coplanaire. Ce que confirme l'observation des tas de sable. La démonstration se fera en résolvant le système formé par les équations des deux cônes. Nous sommes donc ramenés au domaine connu, de l'intersection d'un cône et d'un plan.

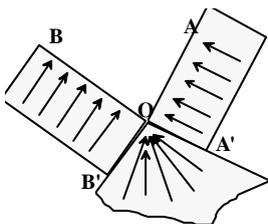
L'**hyperbole** est l'arête séparant deux trous circulaires.



Une fois cela compris, on peut alors faire joujou à l'infini pour obtenir les tas de sable les plus jolis.

Les coins rentrants

En dernier nous attaquons le cas des plaques polygonales concaves. Un retour à l'observation physique et à nos axiomes nous permet de comprendre que le coin rentrant engendre un cône de déversement pour le sable.

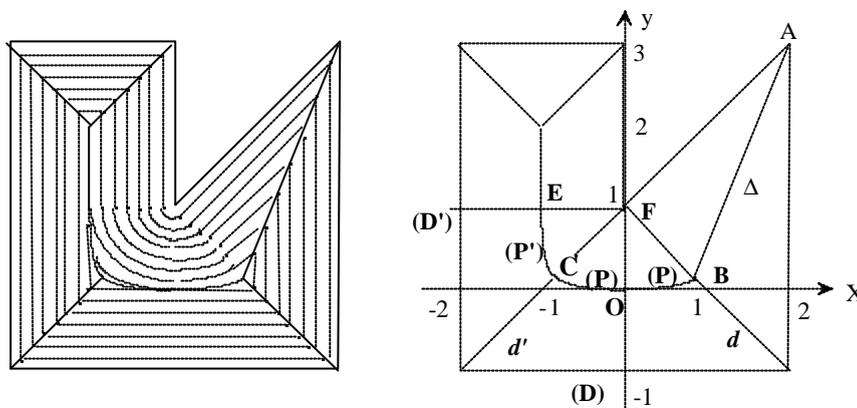


Tout grain de sable dans la zone AOA' ou BOB' tombe perpendiculairement à [OA] ou [OB].

Tout grain de sable dans la zone A'OB' tombe radialement sur O.

Nous étudierons en détail deux cas : une plaque carrée avec un angle rentrant et une plaque rectangulaire avec un trou carré excentré. Étudier

en détail cela veut dire : écrire les équations des projetés des arêtes et voir comment se font les raccordements, étudier les paraboles obtenues à partir de la définition par foyers et directrices, étudier les courbes de niveau.



Exposition et concours en vue

En septembre, j'avais été contacté par la Boutique des Sciences de Strasbourg pour participer au concours Exposcience 2001. Cette manifestation réunit des jeunes, d'Alsace et du Bade Württemberg, ayant réalisé une activité de recherche scientifique dans le cadre d'une classe ou d'un club. A la fin du premier trimestre, après avoir vu que notre activité donnait des résultats, j'y ai inscrit le Club Scientifique. Du coup les deux élèves de Première ont été plus particulièrement chargés de la réalisation des dessins et photos nécessaires aux panneaux d'exposition. Nous avons également réalisé un CD Rom. On a filmé, avec explications, la construction des différents tas de sable étudiés durant l'année. On y a joint deux animations avec des images de synthèse. L'une montre les différents cas obtenus avec des plaques à 6 et 7 côtés ; l'autre montre l'évolution de l'orientation de l'arête faîtière.

Le groupe

Le groupe était constitué de cinq élèves de Terminale S, trois du lycée Lavoisier et deux du lycée Jeanne d'Arc, plus deux élèves de Première S à partir de janvier. Nous fonctionnions à raison d'une heure hebdomadaire. A l'approche d'Exposcience le rythme s'est accru pour être prêts à temps.

Au départ les élèves n'avaient aucune idée de ce dans quoi ils s'embarquaient, moi non plus d'ailleurs. Leurs réactions méritent d'être citées :

« Au début on se demandait vraiment ce qu'il pouvait y avoir à chercher. On croyait que, comme en classe, vous nous faisiez mariner sur un problème dont vous aviez la réponse. Mais quand on a compris que vous n'en saviez guère plus que nous, alors c'est devenu vraiment intéressant, et on a foncé. »

« Au départ je me disais — oui c'est bien joli; mais où est le problème ? —, je ne voyais pour ainsi dire pas ce que l'on allait bien pouvoir chercher. Par la suite j'ai particulièrement aimé ces jours où des idées nouvelles jaillissaient (ça m'a montré que quelquefois, il faut savoir attendre ces fameux jours) ! Le plus intéressant a été le fait qu'il y avait tout, ou presque, à découvrir et surtout que l'on était libre des questions que l'on se posait et des moyens employés pour y répondre »

Aux sources du tas de sable

Il y a 15 ans, sous la plume de Monsieur Roger ISS, l'Ouvert a publié 4 articles qui forment une étude remarquable des tas de sable. Avant de me lancer dans cette aventure; j'avais lu ces articles pour m'assurer que le sujet était intéressant et son étude réalisable par des lycéens; mais en diagonale seulement; pour ne pas être trop influencé. Bien entendu, pour l'essentiel, nous avons redécouvert des résultats qui se trouvaient déjà dans ces articles.

Ils s'en écartent sur deux points.

Les élèves ont voulu étudier le cas des tas pyramidaux que Monsieur Iss écarte, car il les considère, à juste titre, comme des cas particuliers. Mais pour nous la (re)découverte du théorème de la pyramide a été un moment fort.

Monsieur Iss utilise le dual d'un tas de sable pour montrer le lien avec la triangulation des polygones. Ma surprise a été grande de voir un élève apporter la même notion, que nous avons alors utilisée pour trouver l'algorithme permettant d'avoir directement tous les cas possibles avec une plaque polygonale convexe.

Le public

Comme souvent dans ces situations, les élèves ont présenté leur travail avec enthousiasme et compétence. De 7 à 77 ans les tas de sable font vibrer la fibre de l'enfance. Les visiteurs commençaient à regarder les élèves faire leur présentation. Puis ils se prenaient au jeu, attendant de voir ce que donneraient les plaques aux formes bizarres; et ils restaient jusqu'à la fin, étonnés de voir qu'avec un matériau aussi simple on arrivait à des mathématiques complexes et à des formes surprenantes et belles.

Nous avons eu droit à toutes sortes de réactions :

« À quoi ça sert ? »

« Est ce que la forme du tas de sable change si l'on met la plaque à l'envers ? »

« Impossible que des élèves aient trouvé tout ça ! » (dixit un collègue)

« Je saurai comment occuper mes gosses sur la plage. »

Et des questions intéressantes voir pointues : volume du tas, position du centre de gravité, classification des polygones convexes en fonction du tas obtenu. Si l'on mélange le sable avec des aiguilles de pin peut-on obtenir une pente plus raide ? Que se passe-t-il si l'on penche la plaque ou si l'on réalise l'expérience dans un champ électrique (nous l'avons expérimenté, résultat surprenant) etc.

Dialogue sur les deux tas de sables

Voici un exemple de dialogue entre un visiteur et notre groupe.

Le visiteur : *« Avec une plaque circulaire on obtient un cône dont le sommet est à l'aplomb du centre du disque. Mais avec une plaque formée de deux disques sécants, les grains de sable vont s'appuyer sur la crête reliant les sommets des deux cônes, et ces deux sommets vont se rapprocher. D'ailleurs regardez, on voit bien que le sommet du cône n'est pas au centre du disque ! »*

Le groupe : *« Bof, ce n'est pas probant. D'ailleurs si l'on mesure la distance du sommet du cône aux bords, on voit qu'elle est constante ».*

Le visiteur : *« Votre mesure n'est pas précise et ne permet pas de trancher la question ».*

Le groupe : *« Si vous aviez raison cela contredirait la règle qui veut que le tas de sable fasse toujours le même angle avec la plaque ».*

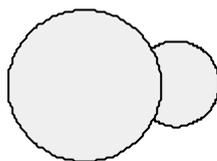
Le visiteur : « Avec votre modèle mathématique de tas de sable vous avez raison. Votre règle vaut peut-être pour les plaques polygonales convexes. Mais le modèle reste-t-il encore valable avec d'autres plaques ? »

Un deuxième visiteur (physicien sachant expérimenter) : « Essayez donc avec deux plaques carrées sécantes. On visualisera mieux le sommet et le centre de la plaque ».

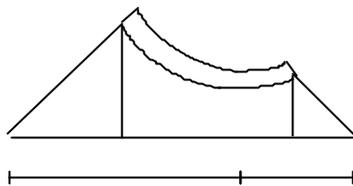
Aussitôt dit aussitôt fait.

Le visiteur : « Ah oui, là, on voit bien que le sommet de la pyramide est au-dessus du centre de la plaque ».

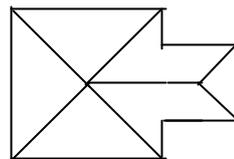
Large sourire des membres du Club Scientifique.



La plaque



Le tas de sable vu de profil



Le 2° tas de sable vu d'en haut

Effets inattendus

- Participation à Exposcience Alsace 2001 (Premier prix).
- Présentation à l'APMEP et à l'IREM à Colmar et à Strasbourg.
- Participation à Expo science Internationale 2001 à Grenoble avec 1500 jeunes de 62 pays.
- Présentation à la Fête de la Science à Paris .
- Devoir présenter les tas de sable en allemand ou en anglais.
- Création d'un site Internet sur le sujet (cette année dans le cadre des TPE).
- Avoir le plaisir, réciproque, de rencontrer Monsieur Roger ISS dont les articles nous ont donné envie de jouer aux tas de sable.

Ma conclusion sera simple ; participer à cette aventure, fut pour moi, un vrai bonheur.

BIBLIOGRAPHIE

- P. CLAUDIN : *Les tas de sable*, La Recherche n° 324, oct. 1999.
- R. CULLIERIER : *Effets de sable*, Science&Vie n°1007, août 2001.
- É. GUYON & J. P. TROADEC : *Du sac de billes au tas de sable*, Éd. Odile Jacob Sciences, 1994.
- R. ISS : *Sable et mathématiques*, L'Ouvert n° 41, déc. 1985 & N° 42, mars 1986.
- R. ISS: *Considérations sur une famille de polygones*, L'Ouvert n° 51, juin 1988.
- R. ISS: *Des tas de sable aux graphes*, L'Ouvert n° 56, sep. 1989.
- R. ISS: *Les tectoèdres*, Bulletin de l'APMEP n° 402, fév. 1996.
- R. ISS: *Sable et géométrie*, Pour la Science n° 234, avril 1997.
- Sur las squelettes* Première épreuve (Algèbre et géométrie) du CAPES 1996

« Je n'ai appris l'exploit des lycéens emmenés dans les tas de sable par notre collègue Francis JAMM qu'en juin dernier, lorsqu'ils ont présenté leur réalisation à Strasbourg et à Grenoble. Ma surprise a été grande (et mon plaisir aussi) de constater qu'ils avaient pu se passionner comme moi sur ce sujet insolite... Je n'ai

pas pensé que la « découverte » des tas de sable allait révolutionner la géométrie mais que l'aspect physique, voire ludique des problèmes qu'ils posaient pouvaient intéresser nos élèves et, à ce titre, constituer un outil, ayant non seulement une certaine valeur pédagogique mais qui pouvait aussi déboucher très naturellement sur des considérations hors programmes. Le club scientifique du Lycée Lavoisier et Francis JAMM ont fourni la preuve que je ne me trompais pas. Je leur en suis reconnaissant.

Dans cette étude leur démarche a été très voisine de la mienne sans pour autant cesser d'être originale. Peut-être même a-t-elle été plus courageuse... En effet, j'ai rapidement abandonné les tas de sable pour m'intéresser à ce que j'ai appelé les « tectoèdres » (des tas de sable où l'égalité des pentes des faces ne serait plus vérifiée). Nos lycéens les ont aussi envisagés en les appelant « faux tas de sable ». Leur étude est en effet plus simple que celle des tas de sable grâce à une numérisation facile et l'élimination des cas particuliers ou « cas limites ». L'étude des tas de sable proprement dits pose beaucoup de problèmes difficiles bien que n'utilisant que des connaissances de géométrie élémentaire. Ainsi nos lycéens ont résolu le problème suivant : quand la base du tas de sable est un quadrilatère quels sont les côtés de celui-ci qui engendrent les faces triangulaires ? (on peut alors déduire la position de l'arête faîtière puisque celle-ci joint les sommets de ces faces triangulaires)... Ils ont trouvé une condition qui est, à mon avis, une petite merveille d'élégance et de simplicité : les côtés qui répondent à la question sont les côtés opposés du quadrilatère dont la somme des longueurs est la plus petite... Ils ont essayé (et moi aussi), mais en vain, de trouver une condition analogue pour le pentagone : comment déterminer les côtés d'un pentagone qui sont les bases des deux faces triangulaires du tas de sable construit sur lui, (bien entendu, sans avoir à faire le dessin de celui-ci) ? Peut-être un lecteur de l'Ouvert pourra-t-il donner une réponse à cette question ? »

Roger ISS



ENSEIGNEMENT

Les tas de sable

F. Jamm et D. Parlongue

Cet article présente, pour l'essentiel, un travail réalisé, durant l'année 2000-2001, par des élèves de Première et Terminale S, dans le cadre du Club Scientifique du lycée Lavoisier de Mulhouse.

La question posée était : « On verse du sable sur une plaque, horizontale et surélevée, jusqu'à ce qu'il déborde de tous les côtés. Que peut-on alors dire de la forme du tas de sable ? »

Après une année de travail joyeux et de découvertes sur les tas de sable, nous avons participé, en mai 2001, au concours Exposcience Alsace ; où nous avons gagné le premier prix. Ceci nous a valu de participer en juillet à Exposcience Internationale à Grenoble. Cette manifestation rassemblait 1200 jeunes, venus de 60 pays, chaque groupe présentant son projet scientifique.

Nous avons été invités à présenter notre travail lors de la Fête de la science à Paris, par monsieur Etienne Guyon, ancien directeur du Palais de la Découverte et de l'ENS, et spécialiste des milieux granulaires.

En juillet 2002, nous serons présents à Exposcience Européenne à Bratislava.

Cette année, dans le cadre des TPE, des élèves ont commencé un site Internet sur ce sujet : <http://www.tasdesable.fr.st>

Règles de formation d'un tas de sable

Nous avons dû commencer par formuler quelques hypothèses, vérifiées, au niveau macroscopique, par l'expérimentation.

- 1) La pente d'un tas de sable est constante. Elle dépend de la granulométrie du sable.
- 2) Quand le sable commence à déborder de la plaque, les grains s'écoulent, selon la ligne de plus grande pente, vers le bord de la plaque le plus proche.

Les arêtes du tas de sable sont donc formées de points équidistants des bords de la plaque les plus proches (1).

La surface du tas de sable est alors une « surface d'égale pente » avec la plaque. C'est une surface réglée et développable. En effet les lignes de plus grande pente,

qui sont rectilignes, forment un angle constant avec la plaque ; par conséquent, on a le même plan tangent au tas de sable tout le long d'une telle ligne.

Il y a une autre façon de voir un tas de sable. On considère un cylindre droit, ayant pour base la plaque, et de hauteur suffisante ; ainsi qu'un cône de révolution, d'axe perpendiculaire à la plaque. On « fraise » ce cylindre en déplaçant le sommet de ce cône le long du bord de la plaque. Le demi-angle au sommet du cône est le complémentaire de l'angle d'une face du tas de sable avec la plaque. Les arêtes du tas de sable sont les points qui ont été touchés au moins deux fois par le cône lors de son déplacement.

Cas d'une plaque polygonale convexe

Les faces sont séparées par des arêtes. Quand une arête part du bord de la plaque, on parle d'**arête latérale**, et, dans le cas contraire, d'**arête faîtière**. D'après (1), en projection orthogonale sur la plaque, les arêtes sont portées par les bissectrices intérieures des côtés de la plaque.

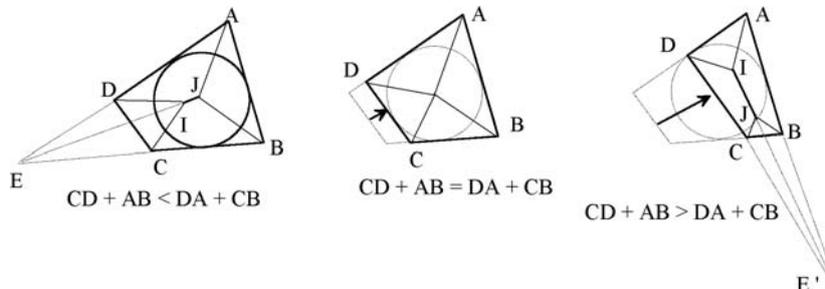
Cas où la plaque est un quadrilatère

On obtient, pour les faces, deux triangles et deux quadrilatères, séparés par une arête faîtière ; sauf dans le cas pyramidal (voir infra).

Le projeté, sur la plaque, de l'arête IJ est porté par la bissectrice de l'angle AED ou $AE'D$.

On voit que l'arête faîtière, quand elle existe, est portée par la bissectrice intérieure de l'angle formé par les côtés opposés du quadrilatère, dont la somme des longueurs est la plus grande.

Cas des tas de sable pyramidaux



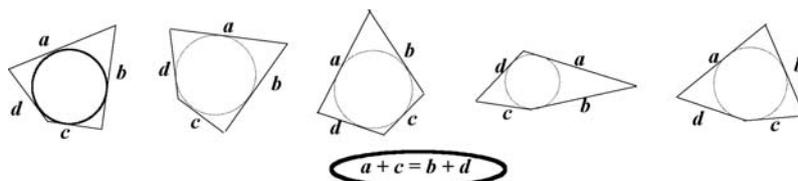
Lorsque les quatre bissectrices sont concourantes en O , l'arête IJ disparaît et l'on obtient un tas pyramidal. O est alors le centre du cercle inscrit dans le quadrilatère.

Or on a le résultat :

Un quadrilatère convexe admet un cercle inscrit si et seulement si les sommes des longueurs des côtés opposés sont égales.

Un quadrilatère étant articulé, on peut modifier les angles de la plaque, tout en conservant un tas pyramidal.

Pour une démonstration et une généralisation du cas pyramidal, voir annexe.



Cas général

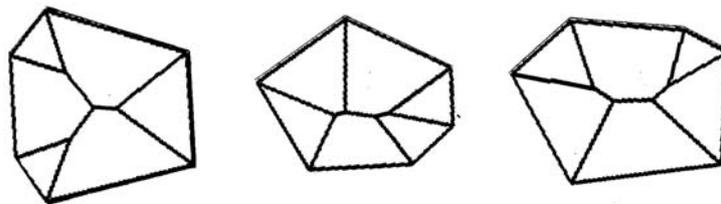
On se place dans la situation où l'on n'a pas trois bissectrices intérieures concourantes.

Il existe toujours au moins deux faces triangulaires.

En dehors du cas pyramidal, il est impossible d'avoir deux faces triangulaires contiguës.

Pour une plaque pentagonale, on obtient toujours, pour les faces du tas de sable, un pentagone entouré de deux triangles et de deux quadrilatères.

Pour l'hexagone, oh surprise on obtient trois configurations différentes, et bien plus au-delà !



Formule d'un tas de sable

À ce stade, on va représenter un tas de sable par une formule.

Une plaque polygonale à n côtés engendre un tas de sable à n faces. Chaque face i a c_i côtés.

On peut représenter un tas de sable par un n -uplet (c_1, c_2, \dots, c_n) .

Chaque n -uplet dépend de la face par laquelle on commence et du sens de parcours du polygone de base.

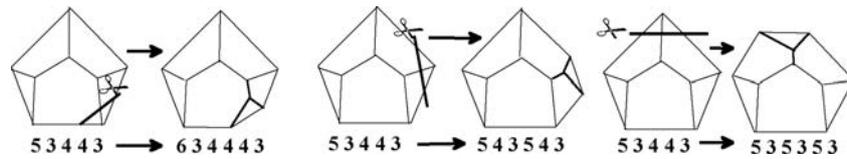
Pour un tas de sable donné, parmi tous les n -uplets possibles on choisira le plus grand au sens lexicographique. On l'appelle : **formule du tas de sable** considéré.

Pour les quadrilatères on obtient : 4 3 4 3

Pour les pentagones on obtient : 5 3 4 4 3

Pour les hexagones on obtient : 6 3 4 4 4 3 ou 5 4 3 5 4 3 ou 5 3 5 3 5 3

Comment arriver, en fonction du nombre de côtés de la plaque, à générer tous les cas possibles ?



Génération des tas de sable par troncatures successives

À partir d'une plaque à n côtés, on obtient une plaque à $n + 1$ côtés en coupant un coin.

Au niveau de la formule du tas de sable, couper le coin compris entre les faces i et $i + 1$ revient à :

- 1) insérer le chiffre 3 entre c_i et c_{i+1} .
- 2) augmenter c_i et c_{i+1} de 1.

L'inconvénient de cette méthode, est que l'on obtient le résultat par récurrence.

Obtention directe de toutes les formules

Représentation d'un tas de sable par son « dual »

Il ne faut pas voir le tas de sable comme un solide, mais comme une surface, formée par ses faces, base exceptée. On peut appeler cette surface un *tectoèdre* du latin *tectum* qui veut dire toit.

On numérote les faces. La face i sera représentée par le point i .

Une arête séparant les faces i et j sera représentée par le segment ij .

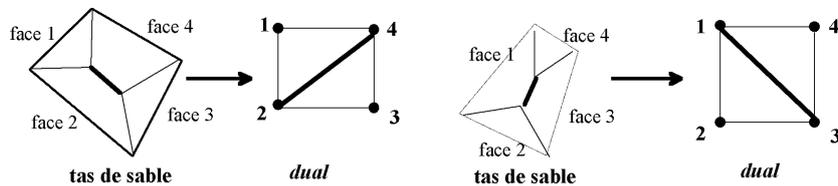
Le graphe ainsi obtenu sera appelé **dual du tas de sable**.

Les diagonales du dual correspondent aux arêtes faîtières du tas de sable.

Les diagonales ne peuvent donc pas se croiser.

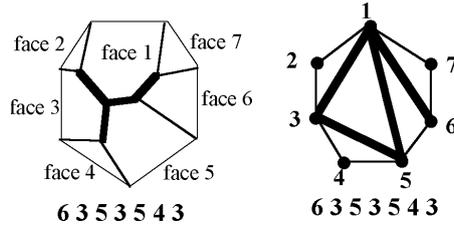
Les côtés de la base du tas de sable (en traits fins) ne sont plus représentés sur le dual.

Exemples . —



Comment trouver la formule d'un tas de sable à partir de son dual ?

On compte le nombre de segments arrivant en chaque point du dual. Ils correspondent aux arêtes bordant la face concernée. Il suffit d'ajouter 1 au résultat pour l'arête sur la base. Ce système entraîne que $n \leq 9$. Cette condition peut être améliorée de la façon suivante : les faces ayant au moins trois côtés, on peut soustraire 3 à chaque chiffre de la formule. Alors 0 correspondra à une face triangulaire etc. On peut également travailler en hexadécimal.

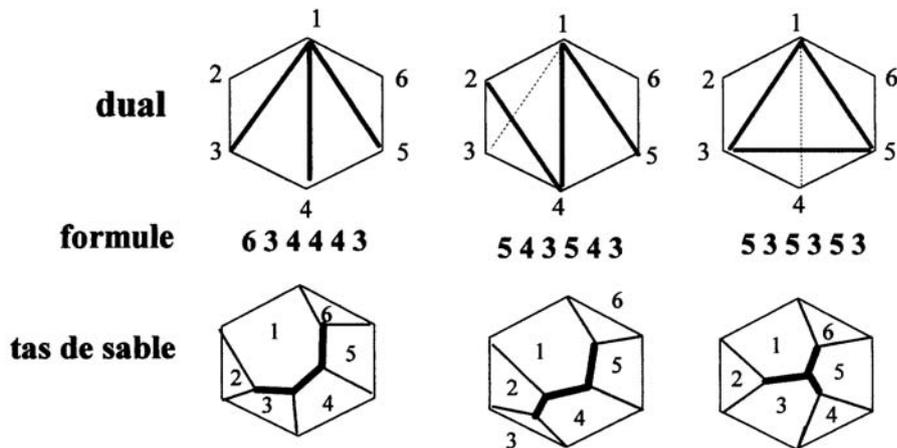


Pour un nombre de côtés donné, comment obtenir directement, à partir du dual, toutes les formules ?

On part de la configuration où toutes les diagonales partent du point 1. Ceci correspond à la formule : $n \ 3 \ 4 \dots \ 4 \ 3$
 En déplaçant une ou plusieurs diagonales, on génère les autres formules (voir schémas ci-dessous).

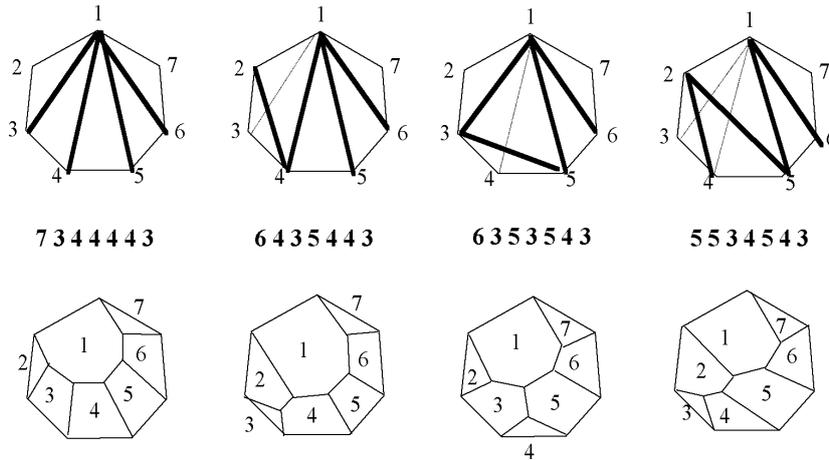
Exemples. — Les traits fins correspondent aux diagonales déplacées.

Pour faciliter la lecture du dessin, les plaques sont des polygones réguliers. Mais alors les arêtes ne sont plus les bissectrices des angles.



Octogone : les 12 possibilités pour le dual

Voir à la fin de l'article la Planche I.



Octogones : les 12 tas de sable correspondants

Voir à la fin de l'article la Planche II.

Des symétries permettent de limiter le nombre de cas à examiner.

On a ensuite intérêt à programmer cet algorithme, pour obtenir toutes les configurations possibles pour une plaque à n côtés. En effet avec 10 côtés on a déjà 82 configurations, et 285 357 avec 17 côtés.

Le nombre configurations des tas des sable pour une plaque polygonale convexe à n côtés est donné par :

$$\frac{(2n-5)!}{n!(n-3)!} + \frac{3(n-3)!}{2\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-4}{2}\right)!} + \frac{1}{2} \frac{(n-3)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-3}{2}\right)!} + \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{2n}{3}-2\right)!}{\left(\frac{n}{3}\right)!\left(\frac{n-3}{3}\right)!}$$

Avec la convention que si l'un des 3 derniers termes contient la factorielle d'un nombre non entier alors il est nul.

En utilisant le dual on est ramené à un problème de triangulation des polygones.

Pour finir, notons que le bidual d'un tas de sable donne l'arête faîtière.

À ce propos, une autre démarche aurait consisté à étudier les différentes configurations à partir de la forme de l'arête faîtière. Par exemple, dans le cas de l'hexagone, elle est constituée de trois segments. Aux symétries près, il n'y a que trois façons de les disposer, sans former de boucle.

A savoir :



Ce qui correspond aux trois cas de l'arête faîtière.

Cas d'une plaque ellipsoïdale

La ligne de crête est un arc d'ellipse dont les sommets sont les foyers de l'ellipse de base et dont les extrémités sont à la verticale des centres de courbures de l'ellipse de base aux sommets de son grand axe.

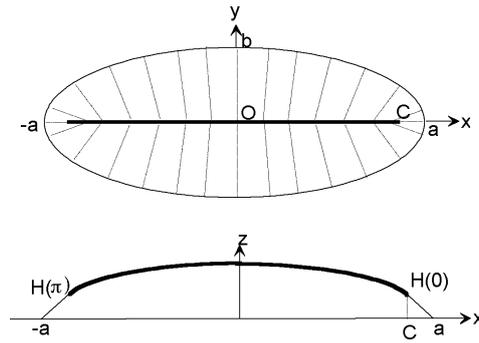
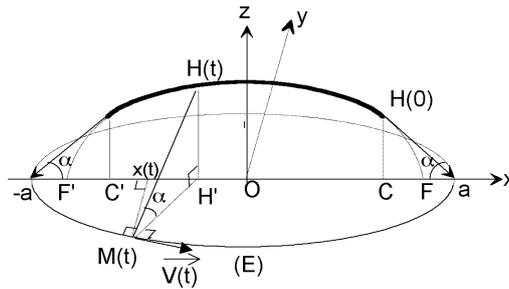


FIG. 1. Vue d'en haut, et de face, du tas de sable obtenu. La ligne de crête est en gras. Les lignes de plus grande pente, qui correspondent au trajet d'un grain de sable, sont en traits fins.

Preuve. — Soit (\mathcal{E}) l'ellipse de base de représentation paramétrique :

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$$



Alors $\vec{V}(t) = (-a \sin(t); b \cos(t))$ est un vecteur tangent à (\mathcal{E}) au point $M(t)$. Soit H un point de la crête, tel qu'un grain de sable partant de H s'écoule jusqu'à M .

Les règles d'écoulement font que \vec{MH} et $\vec{V}(t)$ sont orthogonaux. Soit H' le projeté orthogonal de H sur (O_x) , alors on a $H' = (x'; 0)$ et $\vec{H'M} = (a \cos(t) - x'; b \sin(t))$ et $\vec{H'M}$ et $\vec{V}(t)$ sont aussi orthogonaux.

$$\vec{H'M} \cdot \vec{V}(t) = -a \sin(t)(a \cos(t) - x') + b^2 \sin(t) \cos(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cos(t) - x'(t) = \frac{b^2 \sin(t) \cos(t)}{a \sin(t)} = \frac{b^2}{a} \cos(t)$$

Avec $\sin(t) \neq 0$, mais on peut prolonger pour $t = k\pi$.

$$\Leftrightarrow x'(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos(t)$$

On a donc $H = (x', 0; z(t))$.

Soit $\tan(\alpha) = k = \frac{HH'}{MH'}$ avec α l'angle de la pente de sable avec la plaque.

Alors $H'H = z(t) = k\sqrt{(x' - a \cos(t))^2 + (b \sin(t))^2}$

On a maintenant une représentation paramétrique de la crête.

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos(t); \\ y(t) = 0; \\ z(t) = k\sqrt{\frac{b^4 \cos^2(t)}{a^2} + b^2 \sin^2(t)} \end{cases}$$

On en tire que :

$$z(t) = kb\sqrt{\frac{-x'^2}{a^2 - b^2} + 1}$$

d'où

$$\frac{z^2}{(kb)^2} + \frac{x'^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

Les sommets de la crête correspondent à $z = 0$; et ont donc pour abscisses $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$. Ce sont donc les foyers de l'ellipse (\mathcal{E}).

La crête se prolonge jusqu'aux points où la tangente a une pente égale à la pente du tas de sable. Alors le tas de sable s'évase et il n'y a plus de ligne de crête. La crête s'arrête en $H(0)$ et $H(\pi)$.

Pour x positif, $H'(0)$ a pour abscisse $x'(0) = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

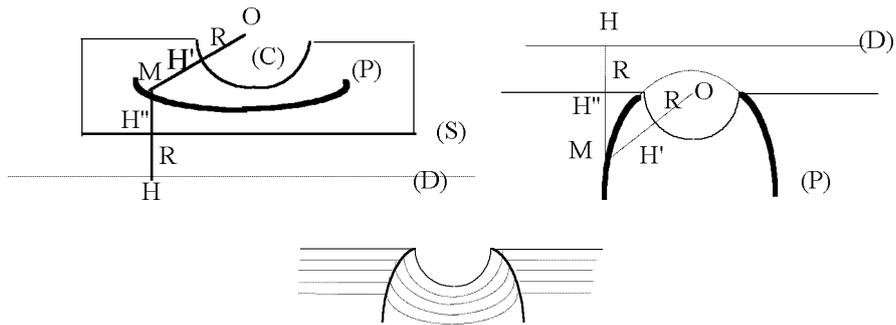
Aux sommets du grand axe de l'ellipse (\mathcal{E}), le rayon de courbure vaut :

$$R = \frac{[(-a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2]^{3/2}}{a \sin(t)b \sin(t) + b \cos(t)a \cos(t)} = \frac{b^2}{a} \text{ pour } t = k\pi$$

L'abscisse, positive, du centre de courbure est alors $a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$. \square

Plaque échancrée par un arc de cercle

Si la plaque est un demi-cercle, on obtient le tas de sable ci-dessous. La crête est, l'intersection du cône engendré par le cercle, et du plan engendré par le diamètre. Les angles qu'ils forment avec la plaque étant égaux on obtient un arc de parabole.

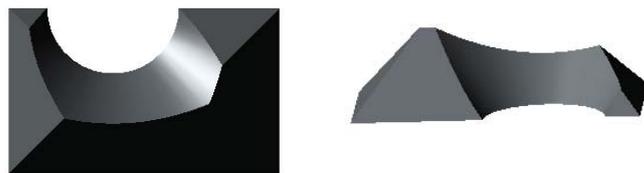


Arête entre un bord circulaire et un bord rectiligne contigus ou non

On travaille en projection orthogonale sur la plaque. Puisque M est situé sur une arête on a : $MH' = MH''$. Donc $MH' + R = MH'' + R$ ou $OM = OH$. On obtient la parabole (P) de foyer O et de directrice (D) .

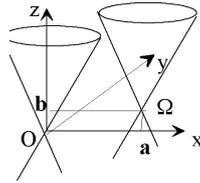
Dans le cône les lignes de niveau sont des arcs de cercle.

Le tas de sable obtenu.



Arête entre deux bords circulaires

Lemme. — *L'intersection de deux cônes de révolution, de même angle au sommet et d'axes parallèles, est plane.*



Preuve. — On suppose le plan rapporté à un repère où le sommet du premier cône est l'origine du repère. Le sommet Ω du deuxième cône a pour coordonnées $(a; 0; b)$. Les cônes ont alors pour équations :

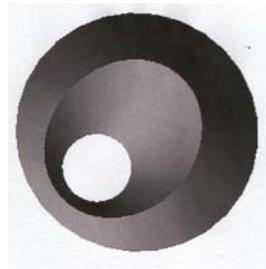
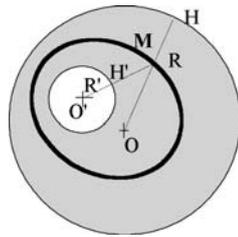
$$z^2 = \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} \quad \text{et} \quad (z - b)^2 = \frac{(x - a)^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}$$

Par soustraction des deux équations, on obtient :

$$2bz = \frac{2ax - a^2}{c^2} + b^2$$

donc une équation de plan. □

Dans le cas d'un disque percé d'un trou circulaire, le tas de sable est formé du cône de base le disque, moins le cône engendré par le trou. En posant une plaque sur l'arête on voit qu'elle est plane.

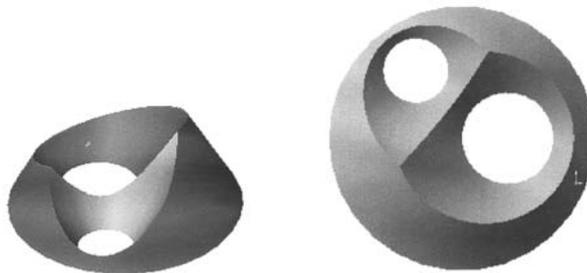


En projection orthogonale sur la plaque on a :

$$MH = MH' \text{ donc } R - OM = O'M - R' \text{ d'où } OM + O'M = R + R'.$$

L'arête est une ellipse dont les foyers sont les centres des cercles.

Et l'hyperbole ?



Elle est obtenue avec l'exemple illustré ci-dessus.

L'arête entre les deux trous est l'intersection de deux cônes, d'axes parallèles et de même angle au sommet. Donc c'est une conique.

Appelons ω le demi-angle au sommet du cône et α l'angle entre le plan de la conique et l'axe du cône. Alors pour l'excentricité e on a :

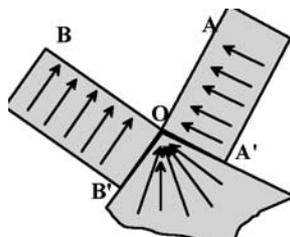
$$e = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\omega)} = \frac{a\sqrt{1+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2c^4}} \quad \text{et} \quad e > 1 \text{ donne } b < \frac{a}{c}$$

Cette condition correspond à la position des deux cônes engendrés par les deux trous. Si $b = 0$ alors le plan contenant l'intersection est perpendiculaire à la plaque, et l'arête est une branche d'hyperbole. On est dans ce cas lorsque les deux trous ont même taille.

Cas d'un polygone concave

Tout grain de sable, dans la zone AOA' ou BOB' tombe perpendiculairement à $[OA]$ ou $[OB]$.

Tout grain de sable, dans la zone $A'OB'$ tombe radialement sur O .



On obtient donc, le long de l'angle rentrant AOA' , deux plans et un cône.

Les lignes de niveau, pour la partie conique, sont des arcs de cercle.

Un exemple :

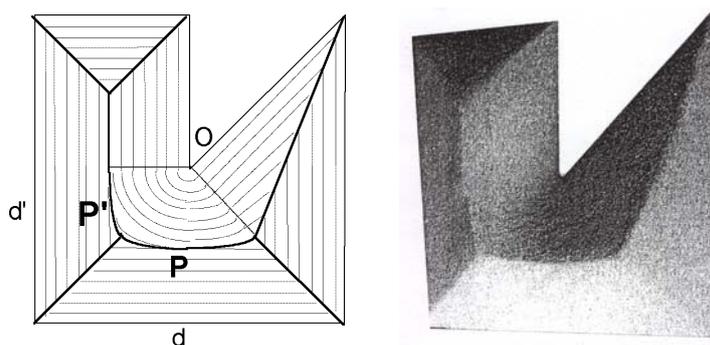
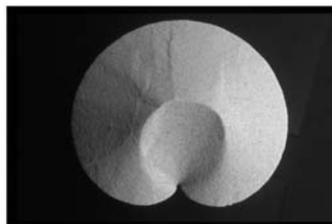
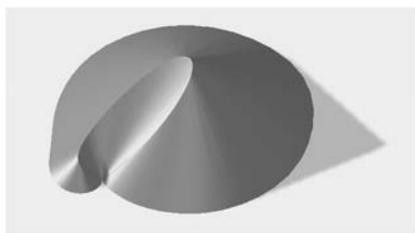
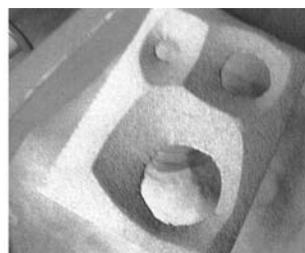
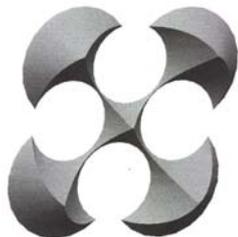


FIG. 2. La zone conique est située entre les perpendiculaires aux côtés de l'angle rentrant. P (resp. P') est un arc de la parabole de foyer O et de directrice d (resp. d').

Ensuite, il ne reste plus qu'à se laisser guider par l'esthétique de ces tas de sable, vrais ou virtuels.



Les deux dernières images sont dues à Monsieur Robert March, professeur à l'École d'Architecture Paris-Val-de-Seine.

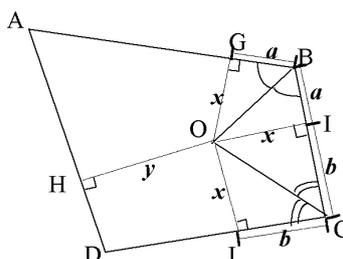
Nous avons eu également le plaisir de rencontrer Monsieur Roger Iss, dont les articles publiés il y a 15 ans dans *L'Ouvert*, nous ont donné envie de jouer aux tas de sable.

En conclusion, le plus important, est ce qu'ont vécu les élèves ; participer à une telle aventure, est un vrai bonheur pour un enseignant.

Annexe Cas des tas de sable pyramidaux

Un quadrilatère convexe $ABCD$ admet un cercle inscrit si et seulement si $AB + CD = BC + DA$.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et O le point d'intersection des bissectrices intérieures des angles ABC et BCD .



Alors O est équidistant de (AB) , (BC) et (CD) . On pose x la distance de O aux trois droites. H est le projeté orthogonal de O sur (AD) , $y = OH$. G, I et J sont les projetés orthogonaux de O sur (AB) , (BC) et (CD) . On pose $a = GB = BI$ et $b = IC = CJ$.

$ABCD$ admet un cercle inscrit si et seulement si $y = x$.

Dans les triangles OHA et OHD on a :

$$\begin{cases} y^2 = OA^2 - AH^2 = (AB - a)^2 + x^2 - AH^2 \\ y^2 = OD^2 - DH^2 = (DC - b)^2 + x^2 - DH^2 \end{cases}$$

$$x = y \iff (1) \begin{cases} AB - a = AH \\ DC - b = DH \end{cases}$$

d'où,

$$AB + DC = AD + BC.$$

Réciproquement. — Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AB + DC = AD + BC$ (2)

Calcul de a , on a :

$$x = a \times \tan(\widehat{ABC}/2) = (BC - a) \times \tan(\widehat{BCD}/2)$$

d'où,

$$a = \frac{BC \times \tan(\widehat{BCD}/2)}{\tan(\widehat{BCD}/2) + \tan(\widehat{ABC}/2)}.$$

Soit H le point de (AD) tel que $AH = AB - a$ (En projetant O sur le côté le plus petit on a : $AB - a > 0$)

Alors $DH = AD - AH = AD - AB + a$.

Or, d'après (2) on a : $DH = AD - AB + a = CD - BC + a = CD - b$.

On retrouve le système (1), donc $ABCD$ admet un cercle inscrit. \square

Polygones à $2n$ côtés (CN)

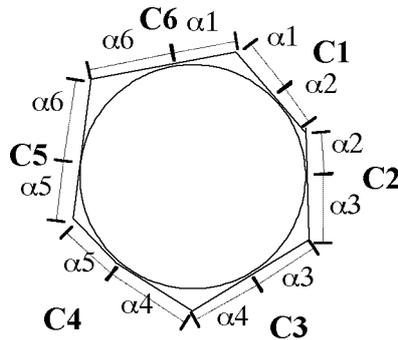
Si un polygone convexe à n côtés, de longueurs C_1, \dots, C_n , admet un cercle inscrit alors il existe n nombres réels positifs $\alpha_1 \dots \alpha_n$, tels que :

$$C_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, C_n = \alpha_n + \alpha_1.$$

Cette propriété n'apporte rien si n est impair.

Mais si n est pair alors :

$$C_1 - C_2 + C_3 \dots - C_n = 0.$$

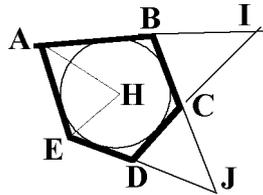


La condition est nécessaire pour qu'un polygone convexe ayant un nombre pair de côtés admette un cercle inscrit, hélas elle n'est pas suffisante comme le montre l'exemple d'un hexagone ayant tous ces côtés égaux mais non régulier.

Le pentagone (CNS)

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe, I l'intersection de (AB) et (CD) et J celle de (BC) et (ED) . Il se peut que les côtés soient parallèles ; mais en les regroupant autrement il existe toujours deux tels points. Le pentagone étant convexe, I et J sont extérieurs au pentagone.

$ABCDE$ admet un cercle inscrit si et seulement si $AIDE$ et $ABJE$ admettent un cercle inscrit. Alors c'est le même cercle qui est inscrit dans les deux quadrilatères.



Preuve. —

– $AIED$ admet un cercle inscrit si et seulement si il existe un point H équidistant des ses quatre côtés. Donc H appartient aux bissectrices de \widehat{BAE} et \widehat{AED} .

– $ABJE$ admet un cercle inscrit si et seulement si il existe un point H' équidistant des ses quatre côtés.

Donc H' appartient aux bissectrices de \widehat{BAE} et \widehat{AED} .

Donc $H = H'$. De plus les rayons des deux cercles sont égaux à la distance de H à (AE) . \square

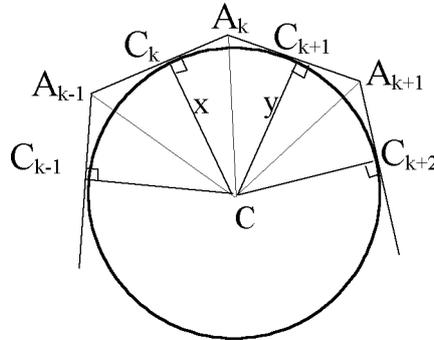
Donc $ABCDE$ admet un cercle inscrit si et seulement si

$$\text{et } \begin{cases} AI - ID + DE - EA = 0 \\ AB - BJ + EJ - EA = 0. \end{cases}$$

Méthode pour déterminer si un polygone admet un cercle inscrit

Soit C le point équidistant des côtés C_{k-1} , C_k , C_{k+1} .

On a,
$$x = C_k \times \frac{\tan(\widehat{A}_{k-1}/2) \times \tan(\widehat{A}_k/2)}{\tan(\widehat{A}_{k-1}/2) + \tan(\widehat{A}_k/2)}.$$



Ceci permet d'établir une méthode pour déterminer si P , polygone convexe à n côtés, admet un cercle inscrit :

Étape 1

À quelle distance de C_1 , C_2 , C_3 , se situe le point équidistant de ces trois côtés ? Ceci donne x .

À quelle distance de C_2 , C_3 , C_4 , se situe le point équidistant de ces trois côtés ? Ceci donne y .

Étape 2

Si $x \neq y$, le polygone n'admet pas de cercle inscrit.

Si $x = y$, alors les cercles tangents à C_1 , C_2 , C_3 et C_2 , C_3 , C_4 ont même rayon ; et leur centre est à l'intersection des médiatrices de C_2 et C_3 . Les deux cercles sont donc confondus. On continue alors en passant au côté suivant du polygone.

Si, ayant fait le tour du polygone, on arrive à la dernière étape n , avec $x = y$ alors P admet un cercle inscrit.

Francis Jamm

Professeurs au lycée Lavoisier de Mulhouse

et *David Parlongue*

Élève en CPGE au lycée Henri IV de Paris

Planche I

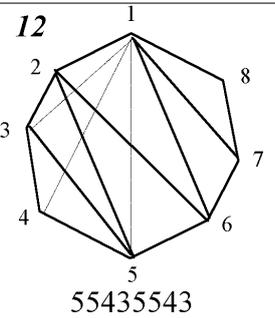
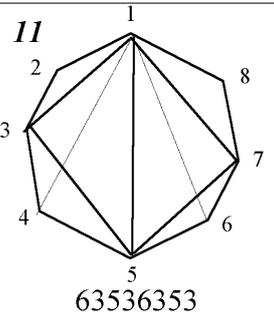
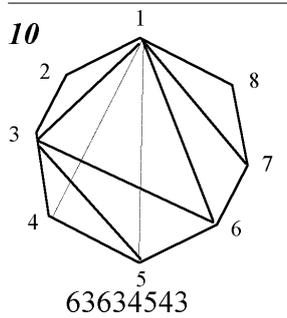
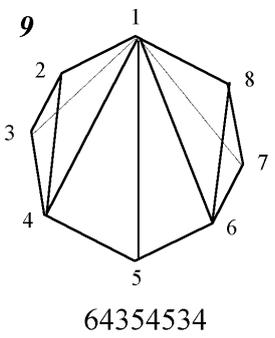
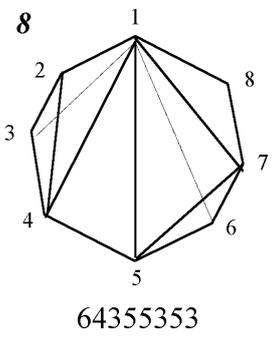
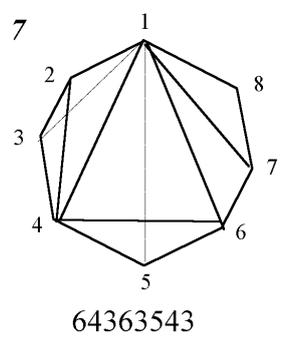
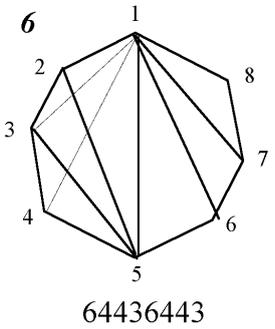
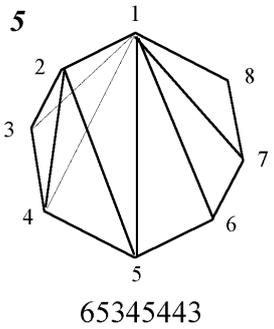
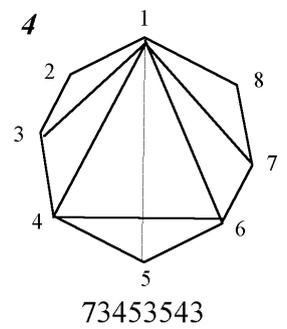
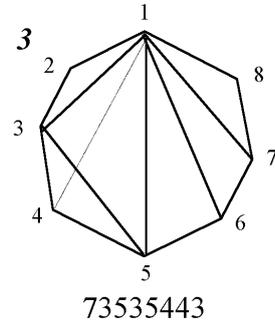
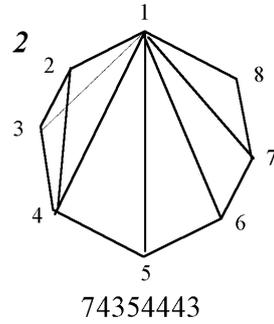
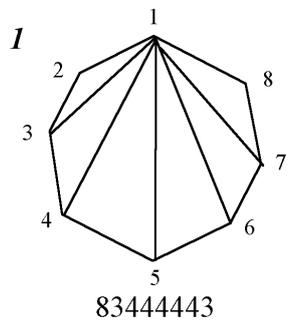
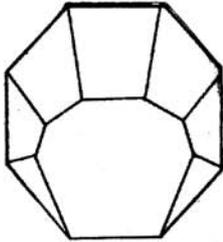
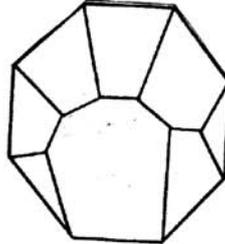


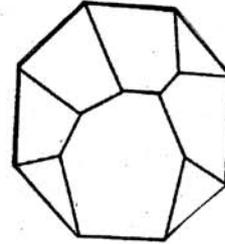
Planche II



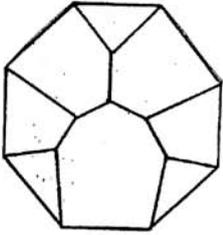
83444443



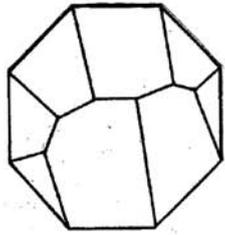
74354443



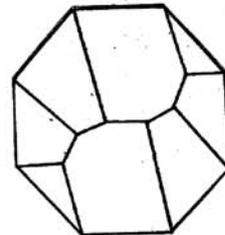
73535443



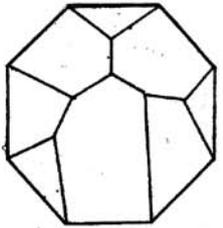
73453543



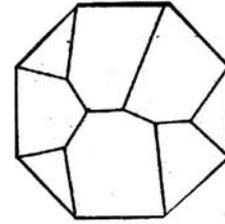
65345443



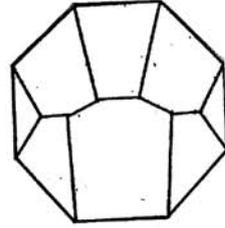
64436443



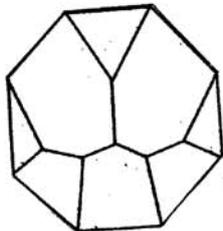
64363543



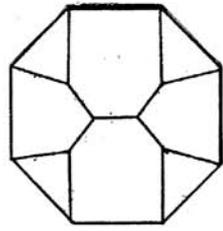
64355353



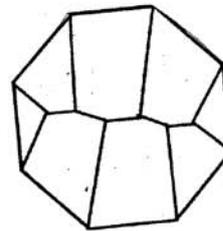
64354534



63634543



63536353



55435543

Références

- [1] *Épreuve d'algèbre et géométrie du CAPES – 1996, Rapport du jury*, CNDP, p. 28–34.
- [2] P. CLAUDIN – « Les tas de sable », *La Recherche* (octobre 1999), no. 324, p. 86–89.
- [3] R. CUILLIÉRIER – « Effets de sable », *Science & Vie* (août 2001), no. 1007, p. 93–103.
- [4] E. GUYON et J.-P. TROADEC – *Du sac de billes au tas de sable*, Odile Jacob, 1994.
- [5] R. ISS – « Sable et géométrie », *Pour la Science* (avril 1997), no. 234, p. 104–107.
- [6] ———, « Sable et mathématique », *L'Ouvert* (déc. 1985), no. 41, p. 1–9.
- [7] ———, « Les tectoédres », *Bulletin de l'APMEP* (fév. 1996), no. 402, p. 33–44.
- [8] ———, « Considération sur une famille de polygones », *L'Ouvert* (juin 1988), no. 51, p. 1–14.
- [9] ———, « Sable et mathématique », *L'Ouvert* (mars 1986), no. 42, p. 1–6.
- [10] ———, « Des tas de sable aux graphes », *L'Ouvert* (sept. 1989), no. 56, p. 1–15.
- [11] F. JAMM – « Les tas de sable au club [...] scientifique », *L'Ouvert* (avril 2002), no. 105, p. 37–46.
- [12] J.-M. KANTOR – « Quelle forme ont les châteaux de sable? », *Cosinus* (avril 2002), p. 18–23.
- [13] R. MARCH – « La géométrie des tas de sable », *Conférence aux journées de l'APMEP*, 2001, http://www2.ac-lille.fr/apmep/les_ateliers/LB30_March.htm.