SABLE ET MATHÉMATIQUE

Roger ISS

Au cours de l'année scolaire 1980-81, le Rallye Mathématique d'Alsace - dont j'étais à l'époque l'un des organisateurs - avait proposé aux élèves de Seconde et de Première le problème suivant :

> "Si on charge, à refus, avec du sable, une plateforme horizontale qui a des bords rectilignes, le tas de sable obtenu n'a que des faces planes dont l'angle avec le plan horizontal est constant. Le dessin ci-contre est le plan d'une plate-forme rectangulaire, percée d'un trou carré (fig. la). Représenter à l'échelle 1/100e et vue d'en haut, cette plateforme supposée horizontale et chargée de sable."

Le corrigé qui en avait été donné conduisait au dessin de la figure lb.

Un collègue m'ayant, par la suite, signalé son désaccord, je m'étais promis de revoir la question. Un séjour récent près d'une plage de sable fin m'a remis le problème en mémoire et j'en ai profité pour me livrer à quelques expériences sur le sable. J'ai pu constater ainsi que, si notre exercice de Rallye était irréprochable sur le plan mathématique, ses hypothèses étaient à revoir sur le plan de la physique. S'il est, en effet, exact qu'un tas de sable est limité par des faces planes lorsque sa base est un polygone convexe, les choses sont plus compliquées dans tous les autres cas. La petite étude mathématique à laquelle je me suis livré m'a conduit à des résultats dont j'ai pensé qu'ils pouvaient intéresser les lecteurs de "l'Ouvert".

Une définition mathématique des tas de sable

Les "tas de sable" dont il sera question sont obtenus en chargeant une plaque plane, horizontale et surélevée avec du sable. Celui-ci s'accumule jusqu'à un moment où tout le sable que l'on rajoute coule et tombe de la plaque. Le tas de sable a pris alors une forme invariable, indépendante de la manière dont on charge la plateforme.
On appellera "surface TS" toute surface délimitant un tel tas de sable. L'observation conduit à formuler deux hypothèses physiques :

1. Si un grain de sable roule ou glisse à la surface d'un tas de sable, il décrit une **ligne de pente**[1] (1) de celle-ci.

2. Un grain de sable, posé sans vitesse initiale sur un tas de sable, roule et glisse si et seulement si la tangente à la ligne de pente fait avec le plan horizontal un angle au moins égal à une valeur constante α.

[1] Ligne de pente d'une surface par rapport à un plan horizontal : courbe tracée sur la surface, telle qu'en chacun de ses points, la tangente est droite de plus grande pente du plan tangent en ce point.

Cet angle α dépend de différents facteurs physiques : taille et forme des grains, degré d'humidité, etc. Pour simplifier les calculs et sans restreindre leur généralité, nous supposerons $\alpha = 45°$ dans toute cette étude (cet angle mesurait environ 32° pour le sable que j'ai utilisé).

Dans ces conditions, nous adopterons la définition suivante :

> Etant donné un plan fixe (dit horizontal) une surface TS est telle qu'en tout point tai, fait avec celui-ci un angle de 45°.

Bien entendu, comme c'est souvent le cas en physique, nos hypothèses ne traduisent la réalité qu'avec une certaine approximation. La trajectoire d'un grain de sable, rectiligne en apparence, est, en réalité, fort sinueuse. Une étude plus précise nous amènerait sans doute dans le domaine des "fractals"... Mais, à l'échelle du décimètre - celle de nos manipulations - elles rendent parfaitement compte des phénomènes observés. Peut-être s'appliquent-elles aussi, à l'échelle de l'hectomètre, aux dunes du Sahara et aux grands pierriers alpins ?

Propriété des surfaces TS

On supposera, pour la mise en équations, que le plan horizontal est le plan *Oxy* d'un repère orthonormé *Oxyz* et que les surfaces considérées sont deux fois continûment dérivables.

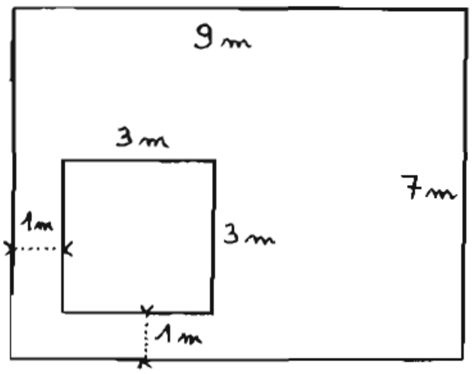


Fig. 1a

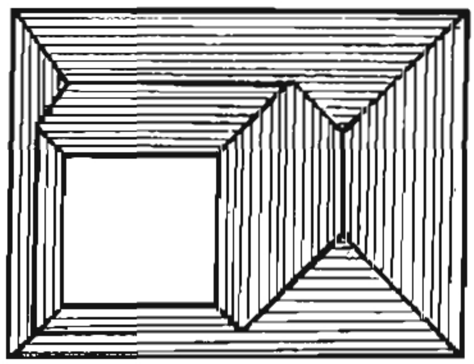


Fig. 1b

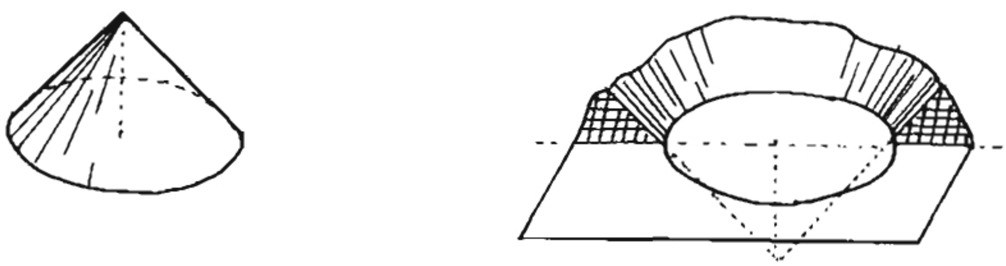


Fig. 2

1ère proposition :

Une surface d'équation $z = f(x,y)$ est une surface TS si et seulement si elle vérifie l'équation aux dérivées partielles

(1) $$f_x'^2 + f_y'^2 = 1$$

(ou, en d'autres termes $\left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\| = 1$).

En effet, dans le plan tangent d'équation $Z - z = f_x'(X - x) + f_y'(Y - y)$

une droite de plus grande pente a pour paramètres $f_x'\,,\, f_y'\,,\, f_x'^2 + f_y'^2$

En écrivant qu'elle fait un angle de 45° avec le plan *Oxy* (donc aussi avec *Oz*), on obtient la condition nécessaire et suffisante : (1) $f_x'^2 + f_y'^2 = 1$.

2ème proposition :

Les lignes de pente d'une surface TS sont des droites.

Si on représente une ligne de pente par des équations de la forme :

$$X = t \qquad Y = \varphi(t) \qquad Z = f(t, \varphi(t))$$

avec $\varphi'(t) = \dfrac{f_y'}{f_x'}$, on constate que le vecteur $\vec{V}\left(f_x'\,,\, f_y'\,,1\right)$ qui dirige la tangente à cette ligne de pente, est constant tout le long de celle-ci. (Calculer la dérivée de $\vec{V}$ en tenant compte des relations obtenues en dérivant l'équation (1)).

3ème proposition :

Toute surface TS est une surface développable dont l'arête de rebroussement est une hélice.

Le vecteur $\left(f_x'\,,\, f_y'\,,-1\right)$ normal à la surface est, lui aussi, constant le long d'une ligne de pente. Le plan tangent ayant une direction fixe tout le long de cette droite et la contenant, il est le même en tout point de celle-ci. La surface TS est donc développable et ses génératrices sont tangentes à une même courbe, l'arête de rebroussement. Celle-ci est une hélice, puisque ses tangentes font un angle de 45° avec *Oz*.

Corollaire :

Les projections sur le plan *Oxy* des courbes de niveau d'une surface TS sont des courbes parallèles ; leur développée commune est la projection sur *Oxy* de l'arête de rebroussement de la surface.

La réciproque de la proposition 3 se démontre aisément. On a donc, incidemment, établi le théorème suivant :

Les surfaces z = f(x,y) intégrales de l'équation aux dérivées partielles $f_x'^2 + f_y'^2 = 1$ sont les surfaces développables dont l'arête de rebroussement est une hélice pour la direction *Oz* et l'angle $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Équation d'une surface TS

4ème proposition :

Une surface TS peut être représentée paramétriquement par des équations de la forme

(2) $$\begin{cases} x = x_0(\theta) + z\cos\theta \\ y = y_0(\theta) + z\sin\theta \end{cases}$$

avec la condition

(3) $$x_0'\cos\theta + y_0'\sin\theta = 0 .$$

Toute droite D faisant un angle de 45° avec l'axe Oz est susceptible d'une représentation de la forme

$$x = x_0 + z\cos\theta \qquad y = y_0 + z\sin\theta$$

θ étant l'angle polaire de sa projection sur Oxy.
En faisant varier x_0 et y_0 en fonction de θ, on obtient la représentation d'une surface réglée. La droite D en est une ligne de pente si et seulement si elle est orthogonale aux horizontales de la surface (dont les tangentes ont pour paramètres $x_0' - z\sin\theta$, $y_0' + z\cos\theta$, 0) c'est-à-dire si la condition (3) est vérifiée.
La courbe $x = x_0(\theta)$, $y = y_0(\theta)$, $z = 0$ est l'horizontale de cote 0 : c'est le bord de la plateforme portant le tas de sable. Nous l'appellerons **courbe directrice** de la surface TS. La relation (3) exprime que la droite D est orthogonale à cette directrice : cette condition, évidemment nécessaire, est donc aussi suffisante.

Nous voilà donc, désormais, en mesure non seulement de donner des équations de toute surface TS dès que l'on connaît celles de sa directrice, mais aussi de fournir une représentation physique de toute surface intégrale (ou tout au moins d'une partie de celle-ci) de l'équation aux dérivées partielles $\left\|\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right\| = 1$. Citons, pour mémoire, deux cas particuliers pour lesquels la solution est désormais évidente :

- si la directrice est rectiligne, la surface TS est plane ;
- si la directrice est circulaire, la surface TS est un cône de révolution à axe vertical.

Détermination du tas de sable correspondant à une plate forme donnée

Pour pouvoir passer des surfaces TS théoriques à la forme réelle des tas de sable, il nous reste deux problèmes à résoudre.

1er problème :

Les équations (2) obtenues ci-dessus définissent en réalité deux nappes symétriques l'une de l'autre par rapport au plan Oxy (changer z en $-z$ et θ en $\theta + \pi$) mais chacune d'elles correspond bien à un tas de sable. En effet une directrice détermine deux parties complémentaires du plan et chacune d'elles fournit une plateforme. Il y a donc deux tas de sable possibles qui correspondent à la même surface TS, à une symétrie près. Pensons par exemple aux tas de sable qui se forment respectivement sur un disque circulaire et autour du "trou" circulaire correspondant (fig. 2).

Signalons, cependant, que cette propriété de symétrie, vraie si la directrice est de classe C^1, n'est pas toujours vérifiée (par exemple pour une directrice polygonale).

Pour que les équations (2) représentent la nappe qui nous intéresse, θ doit être l'angle polaire de la normale à la directrice, orientée positivement vers **l'intérieur** de la plaque.

Exemple :

Supposons que la directrice soit la parabole $y_0 = x_0^2$, la plateforme étant formée par la partie convexe qu'elle détermine dans le plan ($y \geq x^2$).

La condition (3) conduit à la représentation paramétrique de la surface TS :

$$x = z\cos\theta - \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} \qquad y = z\sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{4\sin^2\theta}$$

La normale à la parabole, orientée vers la concavité a pour angle polaire $\theta\,[2\pi]$. La nappe qui convient est obtenue pour $\theta \in\,]0\,,\pi[$.

2ème problème :

Un tas de sable n'étant pas illimité, il nous faut déterminer sur chaque génératrice rectiligne de la surface TS la portion (que nous appellerons "partie utile") qui correspond effectivement au tas de sable. Pour cela, une nouvelle hypothèse, d'origine expérimentale, est nécessaire :

> La partie utile d'une génératrice est comprise entre le point M_0 de cote 0, situé sur la directrice, et le point P de cote positive (ou celui de ces points qui a la plus petite cote, lorsqu'il y en a plusieurs) par lequel il passe au moins une autre génératrice de la surface (Fig. 3).

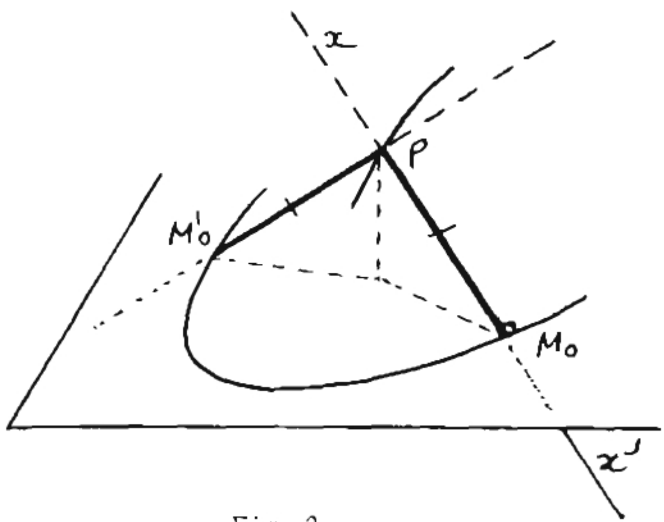


Fig. 3

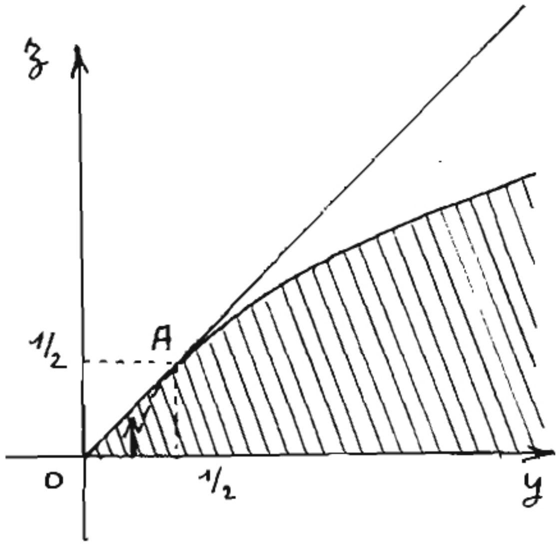


Fig. 4a

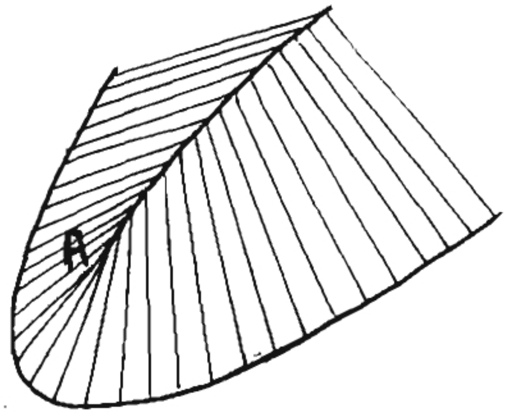


Fig. 4b

En d'autres termes, il faut supprimer sur chaque génératrice

- d'abord et de toute évidence la demi-droite M_0x' située sous la plateforme ;
- ensuite la demi-droite Px "en surplomb" dont l'origine P est le premier point singulier de la surface situé sur cette génératrice.

Nous appellerons "crête" du **tas de sable** l'ensemble de ces points P (c'est une courbe différente de l'arête).

Si la directrice possède un axe de symétrie, il est évident que cette crête se trouve dans le plan de symétrie correspondant de la surface.

Ainsi, si la plateforme est carrée, le tas de sable est une pyramide et la crête est formée des quatre arêtes obliques de celle-ci. Si la plateforme est un disque, la crête se réduit au sommet du cône.

Reprenons l'exemple de la **plaque parabolique**

L'intersection avec le plan de symétrie Oyz est formée de 2 arcs analytiquement distincts (fig. 4a)

– une génératrice contenue dans le plan Oyz : $\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y = z$

– un arc de parabole $z = \dfrac{1}{2\sin\theta} \;\Rightarrow\; y = z^2 + \dfrac{1}{4}$ avec $z \geq \dfrac{1}{2}$

La recherche de la partie utile, facilitée par la symétrie , montre que la crête est constituée par cet arc de parabole. La zone hachurée sur la figure (4a) représente donc le tas de sable vu de profil. En perspective, on a l'allure de la figure (4h). L'extrémité de la crête est un point A, situé sur l'arête de rebroussement et se projetant horizontalement au centre de courbure de la parabole directrice en son sommet. En "avant" de ce point A ($y < 1/2$), la surface du tas de sable est sans point singulier.

L'accord entre la théorie et la réalité physique est remarquable. En accumulant du sable sur une plaque convexe à contour parabolique, on voit très bien apparaître cette crête. On obtient d'ailleurs une configuration analogue en remplaçant la parabole par toute autre courbe convexe, pourvu qu'elle n'ait qu'un seul point où le rayon de courbure passe par un minimum (sinon on peut voir apparaître d'autres arcs de crête...). Lorsque le rayon de courbure minimum diminue, ou, si on préfère, lorsqu'on utilise une plateforme de plus en plus pointue, on voit diminuer la cote du point *A*, extrémité de la crête. Celui-ci se situe finalement sur la directrice elle-même lorsqu'elle présente un point de rebroussement.

Perturbations dues aux angles rentrants

La théorie précédente est en défaut lorsque les hypothèses de dérivabilité, faites au départ, ne sont plus satisfaites. Examinons par exemple le cas où la directrice possède un point anguleux et, pour simplifier, nous supposerons que cette directrice est un polygone.

Au sommet d'un angle saillant (fig. 5a), la solution évidente a déjà été signalée à propos du carré : il se forme une crête rectiligne dans le plan de symétrie.

Considérons, par contre, le cas d'un angle rentrant (fig. 5b) : aux côtés *Cx* et *Cy* correspondent des faces planes, mais la théorie ne donne pas de réponse pour le secteur *x'Cy'*. Il nous faut revenir à la réalité physique : le grain de sable qui tombe dans ce secteur ne peut pas terminer sa course en traversant un des côtés *Cx* ou *Cy*. Il doit donc passer par le point *C* et par conséquent, la partie manquante de la surface est une portion de cône de révolution de sommet C qui se raccorde avec les deux faces planes. C'est bien ce que l'on observe dans la réalité.

Nous pouvons, enfin, représenter le "vrai" tas de sable correspondant à l'énoncé du Rallye Mathématique 1981. Nous laissons au lecteur le soin de faire le dessin...

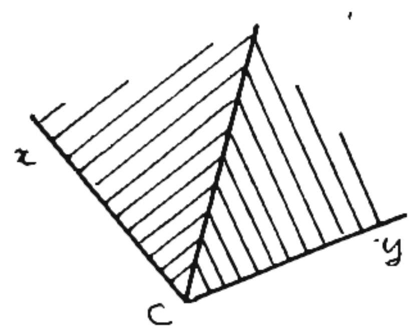


Fig. 5a

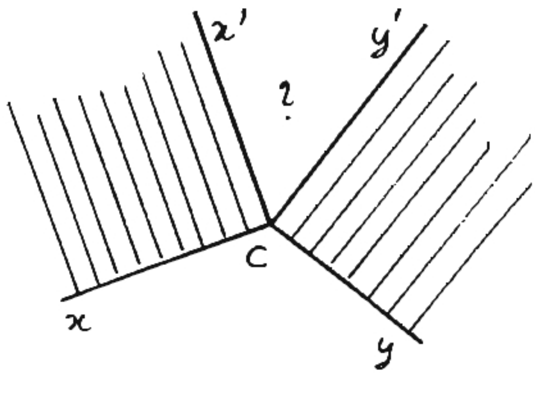


Fig. 5b

N. B. : Pour obtenir le tas de sable représenté en couverture, il suffit d'utiliser une plaque conforme au dessin (4 cercles de même rayon et tangents). On y observe bien la "perturbation" due aux points de rebroussement : pour chacun d'eux, le tas se creuse suivant un demi-cône de révolution.

SABLE ET MATHÉMATIQUE (2)

Roger ISS

Après l'étude théorique des "tas de sable" parue dans le précédent numéro de "l'Ouvert", je voudrais ajouter quelques mots sur l'aspect pratique de la question et signaler une utilisation possible dans notre enseignement.

Comment faire des "tas de sable"

Il faut d'abord se procurer du sable très fin et homogène. Ce n'est peut-être pas si facile que cela, quand on n'habite pas à proximité d'une plage ! Ce sable doit être très sec et ceci est essentiel. Sinon, au lieu de "couler" grain par grain, le sable s'agglomère, on assiste à des glissements de terrain en miniature et le tas obtenu risque d'être peu ressemblant à son modèle mathématique. On peut penser à d'autres matériaux granuleux (sel fin, semoule, etc.), mais ils donnent des résultats décevants car trop hygroscopiques et d'une homogénéité toute relative. Peut-être existe-t-il des sables synthétiques - comme ceux utilisés dans les sabliers - qui donneraient de meilleurs résultats (lignes de crête plus nettes, angle α plus important) ?

Une fois en possession du sable, on peut opérer avec un matériel très simple. Par exemple, on peut utiliser des morceaux de carton (dimensions de l'ordre de 5 à 15 cm), posés sur un ou plusieurs verres au fond d'un plat destiné à recueillir le sable excédentaire. Un demi-litre à un litre de sable peut alors suffire. On peut aussi doubler l'échelle, avec des plaques de contreplaqué d'une vingtaine de cm, posées sur une boîte de conserve au fond d'un baquet et un seau de sable. Une fois que le tas commence à prendre forme, verser le sable en pluie pour bien faire apparaître les crêtes -- et résister à la tentation de modeler le sable

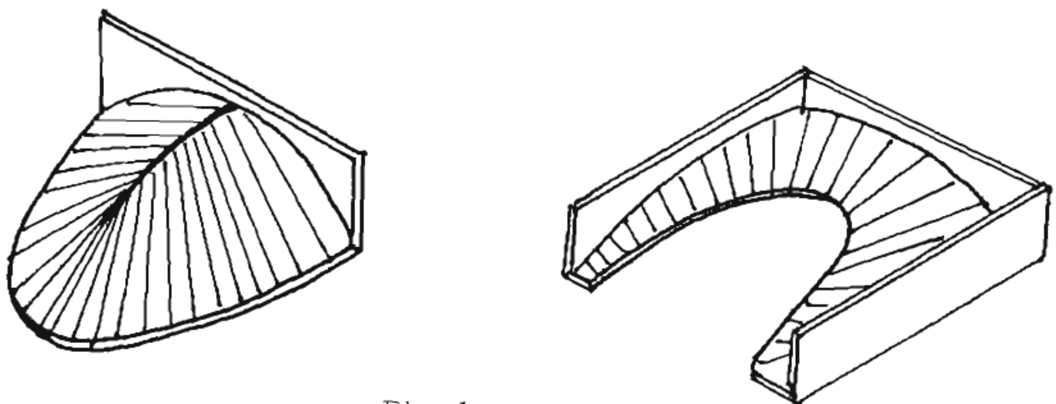


Fig. 1

On peut perfectionner ce matériel. D'abord, lorsqu'on utilise des plateformes comportant des bords ne faisant pas partie de la directrice étudiée, des crêtes indésirables vont apparaître. Pour les éviter, il faut munir ces bords d'un rebord destiné à retenir le sable (Fig. 1). Par ailleurs, nous avons vu qu'une directrice définit, en fait, deux plateformes complémentaires, donc deux tas de sable. On peut obtenir simultanément ces deux tas en découpant, dans le fond d'une caissette une fente ayant la forme de la directrice (avec un dispositif approprié pour maintenir en place la partie éventuellement détachée de ce fond). Le sable, en glissant par la fente, modèle en même temps les deux surfaces.

Peut-être Jean LEFORT pourra-t-il nous présenter un dispositif ingénieux à faire des tas de sable lors d'une prochaine "EXPO-MATH" ?

Dessiner des tas de sable

On peut s'intéresser aux tas de sable à un autre point de vue : celui du dessin. En effet, on peut les représenter comme le font les cartographes pour les montagnes, en dessinant les **courbes de niveau** et les **lignes de crête**.

Nous savons que les courbes de niveau, en projection horizontale, sont formées d'arcs **parallèles** à la directrice, raccordés éventuellement à des arcs de cercle lorsque celle-ci présente des points anguleux ou de rebroussement. Certes, le tracé des parallèles à une courbe, sur le vu de leurs équations, est fastidieux et approximatif, à moins de le faire avec un ordinateur. Mais lorsque la directrice ne comporte que des parties rectilignes ou circulaires, les courbes de niveau sont, elles aussi formées de segments de droite et d'arcs de cercle. Il est donc possible de les tracer avec la règle et le compas (voir par exemple le dessin de couverture de "L'OUVERT" de décembre 85). Nous verrons plus loin que, dans ce cas, les crêtes également se construisent par points et par tangentes avec la règle et le compas. D'autre part, de la vue "en plan" d'un tas de sable, on peut aussi déduire des vues "de profil" en faisant appel à des notions quasi-intuitives de géométrie descriptive.

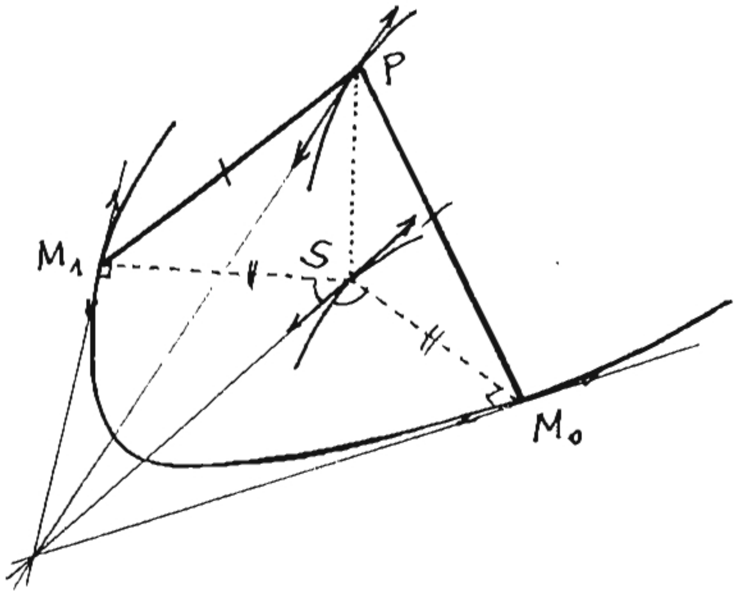
Dans ces conditions, dessiner des tas de sable à partir de directrices simples est un exercice à la portée de beaucoup de nos élèves. Par exemple, pour être capable de représenter le tas de sable qui se forme sur une plaque polygonale convexe, il suffit d'avoir des connaissances sur la symétrie ou les propriétés de la bissectrice. Dessiner un tas de sable à partir de considérations théoriques et pouvoir ensuite vérifier le résultat en le matérialisant avec du sable, et cela en quelques instants, me paraît un exercice de travaux dirigés, susceptible d'intéresser des élèves et propre à développer chez eux la vision dans l'espace. On n'a pas souvent, en mathématique élémentaire, l'occasion de mettre le concret aussi facilement "en équations"...

On peut, de plus, comparer les courbes de niveau dessinées avec leurs homologues de la réalité : en effet on peut faire apparaître celles-ci facilement en arasant le tas de sable avec une réglette que l'on déplace horizontalement.

Propriétés des crêtes

Nous avons vu qu'une crête apparaît dans un tas de sable lorsqu'une nappe de la surface TS, relative à une branche de la directrice coupe la nappe relative à une autre branche de celle-ci (nous supposerons la directrice continûment dérivable, sauf en un nombre fini de points). La crête, intersection de ces deux nappes est donc un ensemble de points de la surface par lesquels il passe au moins deux génératrices rectilignes.

Fig. 2



Soit P un de ces points, par lequel il passe deux génératrices seulement (c'est le cas général). On voit, sur la figure 2, qu'il est, de ce fait, **équidistant** des deux branches de la directrice sur lesquelles s'appuient ces génératrices. Cette propriété se conservant en projection horizontale, la projection de la crête (que nous appellerons encore crête par abus de langage) est formée d'arcs dont chacun est un **ensemble de points équidistants de deux branches de la directrice**[1].

En projection, la tangente à la crête en un point S est la bissectrice de l'angle des deux normales M_0S et M_1S (cela se voit sur la figure 2 en remarquant que la tangente en P est l'intersection des plans tangents à la surface en P).

Par le point P, il passe une courbe de niveau de la première nappe envisagée ci-dessus et une courbe de niveau de la deuxième nappe. Elles y sont soit sécantes, soit tangentes[2]. La courbe de niveau du tas de sable qui passe par P admet donc en ce point deux tangentes distinctes ou confondues, orthogonales respectivement aux deux génératrices M_0P et M_1P. Le point P est donc, en général, un point double, anguleux ou de rebroussement.

Nous en déduisons cette autre propriété, valable aussi bien dans l'espace qu'en projection : la crête est formée d'arcs dont chacun est, soit **un ensemble de points doubles, anguleux ou de**

[1] Cet énoncé peut évidemment paraître flou... Il resterait à préciser ce que l'on entend par "branches" de la directrice et à voir quels couples de branches concourent effectivement à la formation d'un arc de crête. Cela dépasserait le cadre de cet article. La propriété énoncée suffit pour rechercher les crêtes dans le cas simple où nous allons nous placer (les "branches" seront des arcs de cercle et des segments de droite).
Signalons, toutefois, qu'une "branche" peut se réduire à un point. Nous avons vu, en effet, qu'un point anguleux de la directrice, lorsqu'il formait un angle rentrant pour la plateforme, engendrait sur le tas de sable une portion de cône de révolution. Celui-ci peut donc fournir une crête dont les points sont équidistants du point anguleux, sommet du cône, et d'une autre partie de la directrice. Ce point ayant le même effet qu'un arc de cercle, on peut le considérer comme un arc de cercle de rayon nul.

[2] Elles peuvent aussi être confondues : dans ce cas, la crête est la ligne de niveau elle-même. Cela se produit lorsque les deux branches considérées de la directrice sont parallèles (exemples : la directrice est un rectangle, une couronne circulaire...).

rebroussement des courbes de niveau, soit lui-même **une courbe de niveau**.

Application et exemple

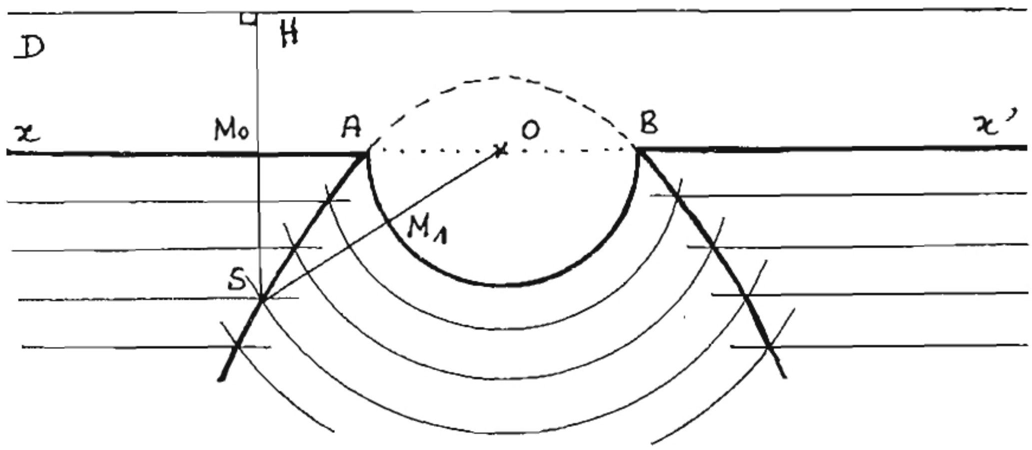
Appliquons ces diverses propriétés à l'étude des crêtes dans le cas particulier déjà signalé ci-dessus : celui d'une directrice formée d'arcs de cercle et de segments de droite qui en constituent les "branches".

1. La surface du tas de sable est, dans ce cas, constituée de portions de plans et de cônes de révolution à axes verticaux et de même angle au sommet. On sait, dans ces conditions, que leurs intersections sont des droites et des coniques. Par suite, la crête est formée (dans l'espace, donc aussi en projection) de segments de droite et d'arcs de conique.

2. Chaque point de la crête, est, en projection, équidistant soit de deux droites, soit d'une droite et d'un cercle, soit de deux cercles (ces cercles pouvant se réduire à des points). Cette crête est donc formée de portions d'ensembles classiques qui sont des droites et des coniques admettant les centres des cercles pour foyers.

3. Les points doubles ou anguleux des lignes de niveau ne peuvent être que des intersections soit de deux droites, soit d'une droite et d'un cercle, soit de deux cercles. On peut donc construire la crête par points et par tangentes avec la règle et le compas. On retrouve ainsi des constructions classiques de la théorie des coniques.

Fig. 3



Tout cela sera plus clair sur un exemple. Supposons la directrice formée d'un demi-cercle de diamètre AB et des prolongements Ax et Bx' de ce diamètre (Fig. 3).

Traçons des courbes de niveau (celles de cotes rondes comme les géographes...), d'une part celles qui sont relatives aux portions rectilignes de la directrice, d'autre part celles qui sont relatives au demi-cercle. Chaque droite de la première famille rencontre le cercle (de même cote) de la deuxième famille en un point S de la crête.

Ce point S est équidistant de la partie rectiligne et de la partie circulaire de la directrice :

$$\left\|\overrightarrow{M_0S}\right\| = \left\|\overrightarrow{M_1S}\right\|.$$

Il est aussi équidistant des courbes de niveau correspondantes. En rajoutant la courbe de niveau fictive de cote $-R$ (R étant le rayon du demi-cercle) - courbe réduite à une droite D et au centre O du demi-cercle -, on voit que :

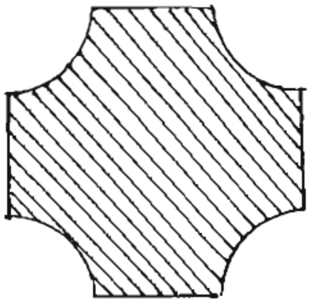
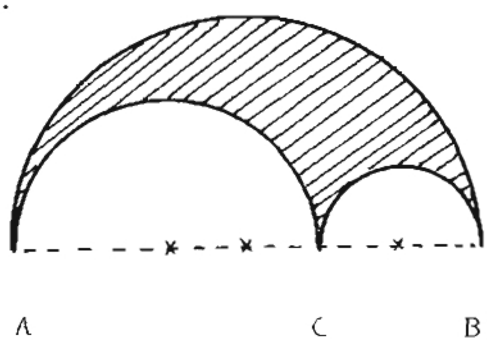
$$\left\|\overrightarrow{OS}\right\| = \left\|\overrightarrow{HS}\right\|.$$

La crête est donc formée de deux arcs d'une parabole de foyer O et de directrice D.

On découvre - ou on retrouve - ainsi les propriétés focales de la parabole... En utilisant une directrice formée de deux cercles on obtiendra de la même façon une hyperbole ou une ellipse...

Exercices proposés aux lecteurs :

Dessiner le tas de sable obtenu avec les plateformes suivantes

1. 	La directrice est un carré, échancré par quatre quarts de cercle de même rayon R. Si $2a$ est le côté du carré $R = a(\sqrt{2} - 1)$. Examinez aussi le cas d'un rayon plus grand ou plus petit.
2. 	La directrice est limitée par trois demi-cercles tangents deux à deux. La crête est constituée par deux arcs d'ellipse et un arc d'hyperbole qui se coupent en un même point, équidistant des trois demi-cercles. (On peut construire ce point en utilisant une projection auxiliaire sur le plan vertical passant par AB et en traçant la courbe de niveau qui y passe.)