

Les polyèdres flexibles et la conjecture du soufflet

Thierry Lambre¹

Les polyèdres constituent une source inépuisable d'inspiration pour l'enseignement de la géométrie et pour l'illustration de la recherche en mathématique.

Pour l'enseignement, les polyèdres se prêtent à de multiples activités toutes très riches (observations, manipulations, réalisations en carton, formulations d'hypothèses, de contre-exemples, etc...). Par exemple, l'emploi des patrons peut débuter dès la Grande Section de Maternelle et se poursuivre jusqu'à l'Université sous des formes très variées.

Par ailleurs, les polyèdres sont un domaine fortement enraciné dans l'histoire des mathématiques. Ils sont présents à peu près à toutes les époques, y compris la nôtre. Ce domaine actif, loin d'être tari, est donc un thème de choix pour les exposés de vulgarisation mathématique, où l'aspect concret et très familier des objets étudiés simplifie grandement la tâche toujours délicate du vulgarisateur qui doit sans relâche expliquer que oui, les mathématiques sont belles et bien vivantes.

Ce texte a pour origine une intervention à l'usage des lycéens lors de la Fête de la Science 2006 ainsi qu'un atelier animé lors des journées APMEP 2006 de Clermont-Ferrand. Les exposés étaient accompagnés d'une grande variété de polyèdres en carton dont bien sûr les cinq polyèdres platoniciens, tous construits en quelques instants grâce aux techniques développées dans [B-V1]². Nous proposons également un modèle du polyèdre flexible de Connelly-Stephen dont il sera question plus bas ainsi que des figures flexibles ornementales en 3 dimensions, souvent estimées plus belles que ce polyèdre flexible. Charge au lecteur de remédier par lui-même à ces absences en prenant des ciseaux, du carton, et de la colle. Signalons le matériel réalisé par la société *Polydron*, très commode pour la fabrication de polyèdres en classe.

Ce bref texte est organisé comme suit.

1. D'Euclide à Cauchy.
2. Polyèdres flexibles de 1813 à 1977.
3. La conjecture du soufflet de 1977 à 1997.
4. Problèmes ouverts sur les polyèdres.

Les figures ont été réalisées par Benjamin Delay (Université Blaise Pascal), que je suis heureux de remercier.

1. D'Euclide à Cauchy.

Les *définitions* 9 et 10 du livre XI des *Éléments* d'Euclide ont plongé la communauté mathématique dans une perplexité moins connue mais un peu comparable à celle occasionnée par la *demande* 5 du livre I (le si célèbre postulat des parallèles). S'il est vrai que

¹Université Blaise Pascal, UMR 6620 du CNRS, Les Cézeaux, 63177 Aubière, Cedex, France. Courriel : thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr

²Sur ce thème, nous recommandons également la lecture de [B-V2] et [M-D]. Dans le registre "beaux livres" susceptibles d'intéresser les bibliothèques, nous conseillons [Le B].

ces *définitions 9 et 10* n'ont pas conduit à des univers mathématiques aussi inconnus et novateurs que les géométries non euclidiennes, il reste que ces *définitions* ont notamment abouti au théorème de Cauchy sur les polyèdres, mais aussi aux notions modernes de symétrie, de convexité et d'isométries indirectes de l'espace affine euclidien. Avant Cauchy, la réflexion la plus achevée sur ces *définitions 9 et 10* est très probablement celle de Legendre, telle qu'elle est exposée dans ses *Éléments de géométrie*, dont la première édition date de 1794. Pour une histoire détaillée de la "crise" engendrée par ces *définitions 9 et 10* d'Euclide et leur lien avec l'émergence du concept de symétrie, nous renvoyons les lecteurs au récent article [H-G]³.

Dans la traduction de François Peyrard de 1819, la définition 10 s'énonce sous la forme suivante :

Les figures solides égales sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en nombres et en grandeurs.

Dans une traduction beaucoup plus récente (2001), B. Vitrac propose le texte suivant :

Et des figures solides égales et semblables sont celles contenues par des [figures] planes semblables égales en multitude et en grandeur.

Proposons une traduction libre de cet énoncé à partir de la traduction de F. Peyrard ([E]) au moyen du dictionnaire suivant⁴.

figure solide : polyèdre convexe.

égales : isométriques.

plan : face du polyèdre.

plans semblables : faces semblables.

égaux en nombres : même nombre de faces.

égaux en grandeurs : faces de même aire.

Les faces étant semblables et de même aire, elles sont isométriques. L'énoncé d'Euclide devient :

Deux polyèdres convexes à faces isométriques sont isométriques.

Cette *définition* d'Euclide est donc une affirmation sans démonstration, soumise à la sagacité des générations ultérieures. Celles-ci n'ont bien sûr pas manqué de se pencher sur cette question délicate et féconde. Comme nous allons le voir, l'histoire de ces deux définitions s'étale sur 24 siècles, c'est-à-dire jusqu'à aujourd'hui.

Sans la convexité, l'énoncé d'Euclide est manifestement faux comme le montre immédiatement la figure 1 où les deux polyèdres sont à faces isométriques mais ne sont pas isométriques.

Dans le contre-exemple ci-dessous, extrait de l'ouvrage de Simson, *Euclidis Elementorum* de 1756, un observateur perspicace remarquera que les angles dièdres des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$,

³Nous tenons à remercier chaleureusement Sébastien Gandon, philosophe de l'Université Blaise Pascal, pour nous avoir communiqué cette référence.

⁴Une justification plus rigoureuse de cette traduction libre peut être trouvée dans l'appareil critique proposé par B. Vitrac qui suit les définitions 9 et 10 de son édition d'Euclide ([E']).

$[DA]$ ne sont pas égaux. On verra qu'on tient là l'argument que le jeune Cauchy saura exploiter pour obtenir une avancée décisive sur cette question et aboutir en 1813, à vingt-quatre ans, à une démonstration de cette *définition* d'Euclide.

Voici un commentaire extrait des *Éléments de géométrie* de Legendre sur cette figure ([Leg], p. 324).

“Il n’y a aucun doute sur l’inégalité des deux solides ainsi construits; mais nous observons que l’un des deux solides contient des angles solides rentrants; or, il est plus que probable qu’Euclide a entendu exclure les corps irréguliers qui ont des cavités ou des angles solides rentrants, et qu’il s’est borné aux polyèdres convexes. En admettant cette restriction, sans laquelle d’ailleurs d’autres propositions ne seraient pas vraies, l’exemple de Robert Simson ne conclut point contre la définition ou le théorème d’Euclide.”

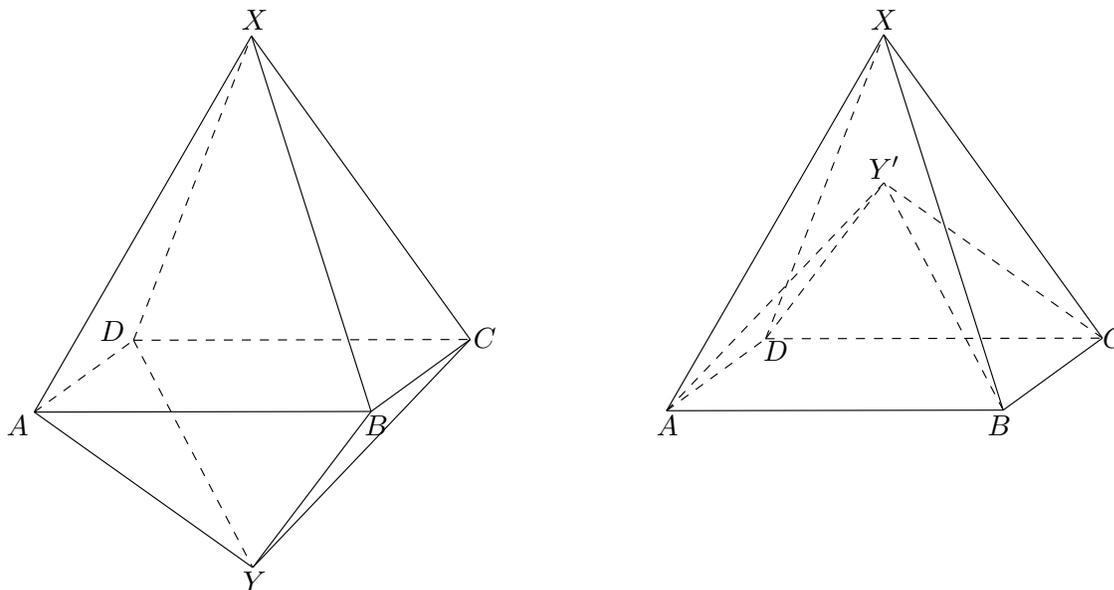


Figure 1

Même avec l'hypothèse de convexité, l'énoncé d'Euclide est encore faux. Il faut une hypothèse sur les sommets (voir l'énoncé plus précis ci-dessous). Le contre-exemple le plus simple est donné par le cuboctaèdre (obtenu par troncature d'un cube au milieu des arêtes, voir figure 2). Posé sur une face triangulaire, ce cuboctaèdre est constitué de deux coupoles. En faisant tourner l'une des deux coupoles d'un sixième de tour, on obtient un autre polyèdre, dont les faces sont isométriques à celles du cuboctaèdre. Et ces deux polyèdres ne sont évidemment pas isométriques.

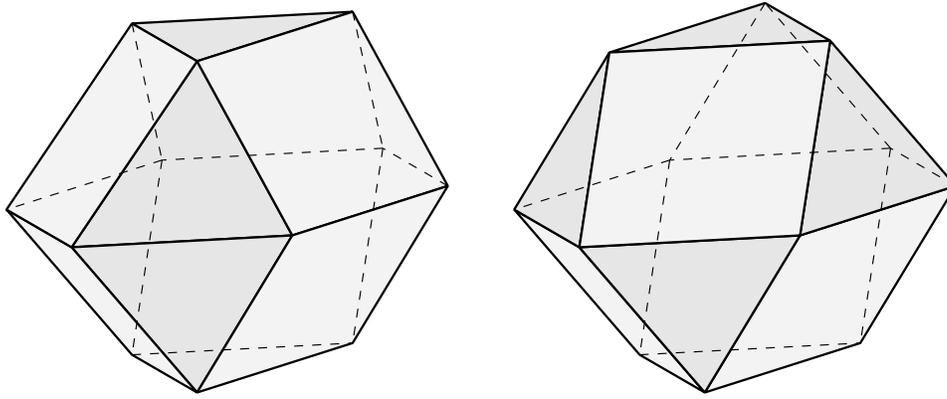


Figure 2

Des contre-exemples plus amusants, tel l’octaèdre sauteur de Wunderlich, circulent sur la toile (voir [Toile1]).

Attachons nous à décrire sommairement la contribution de Cauchy sur ce problème. C’est sur les conseils de Legendre et Lagrange que Cauchy s’est intéressé aux polyèdres. Ses maîtres n’ont pas dû être déçus : pour ses premiers pas mathématiques, Cauchy règle un problème vieux de 22 siècles. La démonstration de Cauchy reste délicate, nous le montrerons plus bas.

L’attribution à Cauchy de ce résultat est parfois discutée. Des cas particuliers importants du théorème sont établis dans la Note XII de la première édition des *Éléments de géométrie* de Legendre (1794). Cauchy n’a jamais caché sa dette à Legendre. Voici un extrait du mémoire de 1813 de Cauchy :

“J’ai examiné, en conséquence, avec beaucoup de soin, les démonstrations que M. Legendre avait déjà données de ce théorème dans plusieurs cas particuliers; et, en développant les principes dont il avait fait usage, je suis parvenu à démontrer, d’une manière générale, le théorème dont il s’agit et quelques autres qui s’y rapportent.”

Legendre de son côté a reconnu sans réserve le talent de Cauchy, comme en témoigne la conclusion élogieuse de son rapport sur le mémoire de 1813 de Cauchy⁵ :

“Nous voulions ne donner qu’une idée de la démonstration de M. Cauchy, et nous avons rapporté cette démonstration presque toute entière. Nous avons ainsi fourni une preuve plus évidente de la sagacité avec laquelle ce jeune géomètre est parvenu à vaincre une difficulté qui avait arrêté les maîtres de l’art, et qu’il était important de résoudre pour le perfectionnement de la théorie des solides.”

À la même époque, dès la dixième édition (1813) de ses *Éléments de Géométrie*, Legendre prend soin d’apporter la précision suivante dans la version remaniée de sa Note XII ([Leg], p. 325-326) :

La démonstration que nous donnons ici, est à quelques développements près, la même que M. Cauchy a communiquée récemment à l’Institut, et qu’il a découverte en partant de

⁵ cité dans [Bel], p. 44.

quelques idées qui avaient été proposées pour le même objet dans la première édition de ces *Éléments*, pag. 327 et suiv.

Dans ce texte, nous resterons au seuil des difficultés, toujours réelles, de la démonstration de Cauchy. Pour franchir ce seuil, nous renvoyons à la *Géométrie* de Berger ([B], 12.8). Énonçons quand même le résultat de Cauchy sous une forme plus précise.

Théorème (Cauchy, 1812).

Soient P et P' deux polyèdres convexes de frontières respectives ∂P et $\partial P'$. On suppose qu'il existe une bijection

$$f : \partial P \rightarrow \partial P'$$

respectant les sommets, les arêtes et les faces⁶ et dont la restriction f_F à chaque face F du polyèdre P soit une isométrie de F sur une face F' de P' . Alors il existe une isométrie g de l'espace telle que $g(P) = P'$ et dont la restriction à la frontière de P est égale à f .

Outre la notion de convexité, le cœur de la démonstration de Cauchy consiste en un raisonnement subtil sur les angles dièdres des arêtes du polyèdre P .

Pour définir l'angle dièdre d'une arête d'un polyèdre P , on remarque que cette arête est commune à exactement deux faces F et G . L'angle dièdre $\delta = \delta(a)$ est alors la quantité $(\widehat{UXV}) \in]0, \pi[$ où l'angle (\widehat{UXV}) est défini par les intersections (XU) et (XV) d'un plan perpendiculaire à l'arête a avec les faces F et G .

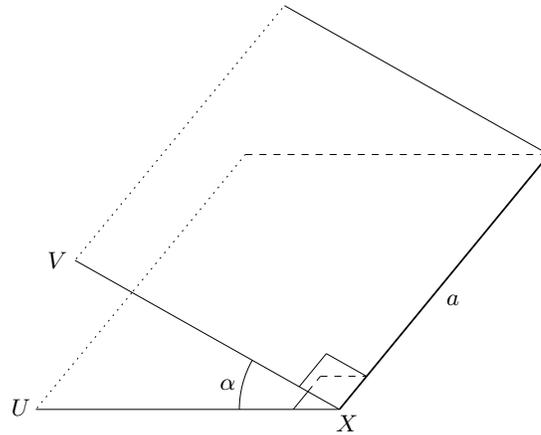


Figure 3

La proposition suivante peut être considérée comme la première étape de l'argument de Cauchy. Elle présente de multiples intérêts : sa démonstration est facile, elle nécessite à la fois la convexité et les angles dièdres. C'est pourquoi nous la développons un peu.

⁶Cette formulation un peu vague signifie que la bijection f respecte les relations d'incidence entre sommets, arêtes et faces, c'est-à-dire que si le sommet S appartient à l'arête A et l'arête A appartient à la face F , il en est de même pour le sommet $f(S)$, l'arête $f(A)$ et la face $f(F)$.

Proposition.

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy, on suppose de plus que la bijection $f : \partial P \rightarrow \partial P'$ conserve les angles dièdres, ce qui veut dire $\delta(f(a)) = \delta(a)$ pour toute arête a de P . Alors la conclusion du théorème de Cauchy est satisfaite et les polyèdres P et P' sont isométriques.

Pour démontrer cette proposition, on commence par se ramener au cas où les polyèdres P et P' ont une face commune. Pour cela, soit F une face de P isométrique à la face F' de P' via la restriction $f_F : F \rightarrow F'$. Considérons n'importe quelle isométrie φ de l'espace envoyant la face F' de P' sur la face F de P , c'est-à-dire telle que $\varphi(F') = F$. Le polyèdre $P_1 = \varphi(P')$ est évidemment convexe (image d'un convexe par une application affine). Posons $f_1 = \varphi \circ f$. L'application $f_1 : \partial P \rightarrow \partial P_1$ est une bijection, isométrique sur les faces et conservant les angles dièdres. De plus P et P_1 ont la face F en commun.

Par convexité du polyèdre P , celui-ci est entièrement contenu dans un demi-espace délimité par le plan de l'une quelconque de ses faces (et il en est évidemment de même pour P_1).

Si les deux polyèdres P et P_1 sont dans les deux demi-espaces distincts délimités par leur face commune F , on introduit l'isométrie σ_F , symétrie orthogonale par rapport au plan de la face F et on pose $P_2 = \sigma_F(P_1)$ et $f_2 = \sigma_F \circ f_1$.

Les polyèdres P et P_2 sont tels que :

- le polyèdre P_2 est isométrique au polyèdre P' ;
- les polyèdres P et P_2 ont la face F en commun et sont situés dans le même demi-espace de frontière cette face commune;
- il existe une bijection $f_2 : \partial P \rightarrow \partial P_2$ satisfaisant aux hypothèses du théorème de Cauchy et conservant les angles dièdres.

On a donc bien réduit la situation au cas proposé. Nous supposons à présent que P et P' ont une face commune et sont dans le même demi-espace délimité par cette face commune. Il est à présent bien facile de construire une isométrie de l'espace envoyant P sur P' . En effet, la conservation des angles dièdres va nous conduire à $P = P'$. Vérifions cela.

Soit a une arête de la face commune F . Une arête appartient à exactement deux faces d'un polyèdre.

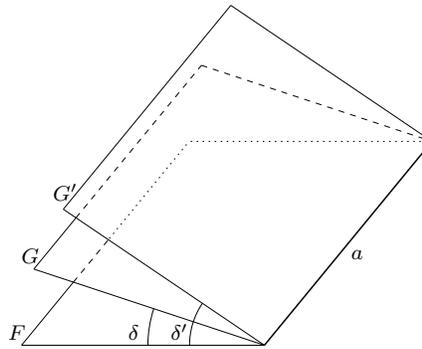


Figure 4

Soient donc G et G' les faces de P et P' respectivement d'arête commune a avec la face F . Notons δ l'angle dièdre des faces (F, G) du polyèdre P en l'arête a et δ' l'angle dièdre des faces (F, G') du polyèdre P' en l'arête a . La bijection $f : \partial P \rightarrow \partial P'$ fixe la face commune F , envoie isométriquement la face G sur la face G' . Par conservation des angles dièdres, on a donc $\delta = \delta'$. Mais puisque les faces G et G' sont dans le même demi-espace de frontière F , on en déduit $G = G'$.

Pour conclure que $g = id$ convient, il reste à remarquer que deux faces quelconques d'un polyèdre (non nécessairement convexe) peuvent être reliées par une chaîne de faces adjacentes, ce qui permet de proche en proche de montrer que toutes les faces de P coïncident avec celles de P' . Ceci montre bien $P' = P$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

La partie difficile de la démonstration du théorème de Cauchy reste à faire et nous avons déjà annoncé que nous ne la ferons pas. Disons simplement qu'elle consiste à montrer que sous les hypothèses du théorème de Cauchy, la bijection $f : \partial P \rightarrow \partial P'$ conserve les angles dièdres. Le théorème XIII du mémoire de Cauchy est formulé ainsi :

Dans un polyèdre convexe dont toutes les faces sont invariables, les coins compris entre les faces ou, ce qui revient au même, les inclinaisons sur les différentes arêtes sont aussi invariables; en sorte que, avec les mêmes faces, on ne peut construire qu'un second polyèdre convexe symétrique du premier.

Cette conservation des angles dièdres n'est pas du tout triviale (voir la *Géométrie* de Berger, 12.8). Signalons qu'on peut ramener cet énoncé au lemme suivant, tel qu'il apparaît dans le texte de Legendre. Ce lemme paraît si évident qu'une démonstration semble superflue. Et pourtant...

Lemme du bras de Cauchy, ([Leg], Lemme 1, Note XII, p. 327).

“Tous les côtés d'un polygone sphérique AB, BC, CD, DE , étant donnés, à l'exception du dernier AF , si l'on fait varier l'un des angles B, C, D, E , opposés au côté AF , les autres étant constants, je dis que le côté AF augmentera si l'angle augmente, et qu'il diminuera si l'angle diminue. Dans tous les cas, on suppose que le polygone est convexe avant et après son changement de figure.”

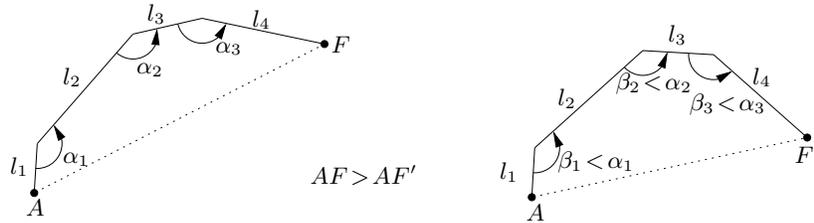


Figure 5

Que le polygone soit sphérique ou plan n'intervient pas, la difficulté est de même nature. Pour une démonstration, voir [Leg], p. 327 ou [A-Z], p. 76.

Avant d'aborder les polyèdres flexibles, signalons ici une première conséquence du théorème de Cauchy. Il s'agit d'une affirmation encore une fois historique puisqu'il s'agit de démontrer

qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers convexes, affirmation dont l'origine remonte au *Timée* de Platon.

Un polyèdre convexe P est *régulier* de symbole (p, q) si les faces de P sont des polygones réguliers ayant toutes le même nombre p de côtés et si en chaque sommet de P , il aboutit le même nombre q de faces.

Avec ces conditions, toutes les arêtes du polyèdre P sont isométriques et toutes les faces de P sont également isométriques. Traditionnellement, on note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces du polyèdre P .

Corollaire du théorème de Cauchy. *À similitude près, il y exactement 5 polyèdres réguliers convexes : tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre et dodécaèdre.*

Esquissons la démonstration de cette affirmation en admettant les points suivants pour nous concentrer sur l'emploi du théorème de Cauchy dans cette démonstration.

a) Par des arguments angulaires élémentaires, on montre que le symbole (p, q) ne peut prendre que les 5 valeurs suivantes : $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ $(5, 3)$.

b) Grâce à la formule d'Euler⁷ $s - a + f = 2$, on en déduit que (s, a, f) ne peut prendre que les 5 valeurs suivantes : $(4, 6, 4)$, $(8, 12, 6)$, $(6, 12, 8)$, $(12, 30, 20)$ $(20, 30, 12)$.

c) Les 5 situations envisagées en b) sont bien réalisées. Les seuls cas difficiles sont bien sûrs ceux de l'icosaèdre et du dodécaèdre⁸.

Ayant admis ces trois affirmations (pour lesquelles on peut utilement s'aider de la *Géométrie* de Berger, 12.7), on a donc l'existence des 5 polyèdres platoniciens. C'est pour leur unicité que le théorème de Cauchy entre en scène.

Soient en effet deux polyèdres réguliers convexes P et P' ayant même nombre de sommets, même nombre d'arêtes et même nombre de faces. Ils ont en particulier même symbole (p, q) car $pf = 2a = qs$. Les faces de ces polyèdres sont donc des polygones réguliers ayant le même nombre p de côtés.

Mais deux polygones réguliers convexes de même nombre de côtés sont semblables. Après une similitude σ , les faces de P et de $\sigma(P')$ sont donc isométriques et le théorème de Cauchy s'applique : les polyèdres P et $\sigma(P')$ sont isométriques donc P et P' semblables, cqfd.

On semble autorisé aujourd'hui à dire que les débuts de Cauchy ressemblent assez à un coup de maître : résoudre deux problèmes si fortement ancrés dans l'histoire des mathématiques en guise de débuts n'est pas un mince privilège...

2. Polyèdres flexibles de 1812 à 1977.

Un polyèdre P est flexible s'il existe une déformation continue de sa forme qui n'affecte pas ses faces. Cette notion se formalise en la définition plus précise ci-dessous, qui est un peu lourde mais nécessaire.

⁷Cette formule de Descartes-Euler-Legendre-Cauchy nécessiterait à elle seule un exposé détaillé. Voir [P] pour une preuve à l'usage des écoles, qui reprend essentiellement les arguments de Legendre. Et voir [La] pour un historique de cette preuve.

⁸L'un des deux suffit car l'autre s'en déduit rapidement. Il y a un petit miracle où le nombre d'or joue un rôle important...

Définition.

Un polyèdre P de l'espace euclidien E est flexible s'il existe une application continue

$$g : [0, 1] \times P \rightarrow E,$$

notée $g_t(x)$, telle que :

1) Pour tout t de $[0, 1]$, $P_t := g_t(P)$ est un polyèdre.

2) L'application $g_t : P \rightarrow P_t$ est bijective.

3) L'application $g_0 : P \rightarrow P_0$ est une isométrie.

4) L'application $g_1 : P \rightarrow P_1$ n'est pas une isométrie.

La restriction f_t de g_t à la frontière ∂P de P est telle que

5) $f_t : \partial P \rightarrow \partial P_t$ est bijective.

6) Pour toute face F du polyèdre P , $f_t(F)$ est une face de P_t et la restriction de f_t à la face F est une isométrie de F sur $f_t(F)$.

Théorème de rigidité de Cauchy. Un polyèdre convexe est rigide⁹.

Démontrons ce théorème en supposant le contraire, c'est-à-dire le polyèdre convexe P flexible. Introduisons l'ensemble

$$X = \{t \in [0, 1], g_t : P \rightarrow P_t \text{ est une isométrie}\}.$$

L'ensemble X est fermé. [Essentiellement car l'application g est continue. Prendre une suite de points $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X de limite $t \in [0, 1]$. Considérer une suite d'isométries $g_n = g_{t_n}$ de source P de but des polyèdres P_n . Par continuité, ces polyèdres isométriques à P ont pour limite le polyèdre P_t qui est donc isométrique à P par l'isométrie g_t].

L'ensemble X est ouvert. C'est plus subtil et le théorème de Cauchy intervient. Soit t un point de X et t' un point de $[0, 1]$ voisin de t . Puisque t appartient à X , l'application g_t est une isométrie. En particulier $P_t = g_t(P)$ est donc convexe. De plus, par continuité, $P_{t'}$ est également convexe car t' voisin de t . L'application

$$f_{t'} \circ f_t^{-1} : \partial P_t \rightarrow \partial P \rightarrow \partial P_{t'}$$

satisfait aux hypothèses du théorème de Cauchy. Il existe donc une isométrie $g : P_t \rightarrow P_{t'}$ et par suite $g \circ g_t : P \rightarrow P_{t'}$ est une isométrie, c'est-à-dire $t' \in X$.

L'ensemble X est donc ouvert et fermé dans le connexe $[0, 1]$, il est donc vide ou égal au segment $[0, 1]$. Mais 0 appartient à X par hypothèse donc $X = [0, 1]$. Mézalor 1 appartient à X , c'est-à-dire que g_1 est une isométrie, ce qui est l'absurdité recherchée et le polyèdre convexe P n'est donc pas flexible.

Ce théorème de rigidité pose évidemment la question de l'existence de polyèdres flexibles. Là encore Cauchy peut être content de son ouvrage : hormis les octaèdres articulés introduits par Bricard en 1897, (voir [Leb2] et [Toile2]), presque rien de nouveau sur les polyèdres flexibles durant 164 ans. On ignorait même s'il pouvait en exister. Ce n'est qu'en 1977 que R. Connelly a fourni une avancée substantielle.

⁹Est-il nécessaire de dire qu'un polyèdre est rigide s'il n'est pas flexible?

Théorème de Connelly (1977). *Il existe un polyèdre flexible.*

n.b. L'énoncé de Connelly est plus précis. Les octaèdres articulés de Bricard (dont par ailleurs Connelly s'est beaucoup inspiré) sont des polyèdres flexibles mais ils ne sont pas *plongés* dans l'espace. Ils possèdent des auto-intersections de faces qui empêchent notamment une réalisation matérielle en carton. La force du théorème de R. Connelly est que son polyèdre est plongé dans l'espace ambiant, il s'agit d'un vrai polyèdre. Son énoncé exact est "There is a flexible embedded surface."

Assez rapidement le modèle de R. Connelly a été simplifié, notamment par K. Steffen, qui a construit le polyèdre flexible le plus simple connu à ce jour. Le polyèdre flexible de Steffen possède 9 sommets et on sait qu'un polyèdre ayant au plus 7 sommets est rigide. La chasse au polyèdre flexible à 8 sommets est toujours ouverte mais tous les chasseurs sont rentrés bredouilles à ce jour.

Le polyèdre de Steffen peut être abondamment observé en patron ou en flexion sur la toile (voir [Toile3]). Son patron est également proposé dans la *Géométrie* de Berger (paragraphe 12, figures 170 et 171) et aussi plus récemment dans [A-Z].

La conjecture du soufflet de 1977 à 1997.

Il a été assez facile à R. Connelly de montrer que le volume¹⁰ de son polyèdre flexible reste constant durant sa manipulation. Une rumeur tenace ([S], 2.1) affirme que D. Sullivan est à l'origine de ce résultat. Les mathématiciens étaient si heureux de la découverte de ce polyèdre flexible que celui-ci fut réalisé en métal et exposé à l'IHES de Bures-sur-Yvette. Après observation de cet objet (pas très beau mais pas franchement laid), D. Sullivan aurait injecté la fumée de sa pipe à l'intérieur du polyèdre, puis aurait manipulé celui-ci et aurait constaté qu'aucune fumée ne ressortait de l'intérieur du polyèdre. La conjecture du soufflet était née.

Conjecture du soufflet. *Le volume de tout polyèdre flexible reste constant lors de la déformation du polyèdre.*

Cette conjecture a été démontrée en 1997 par R. Connelly et deux collaborateurs R. Sabitov et I. Walz (voir le rapport de J.-M. Schlenker au séminaire Bourbaki [S]). Il n'est pas possible ici de décrire la démonstration de ce beau résultat de géométrie faussement élémentaire. Néanmoins une analogie est possible à partir de considérations historiques.

Chacun sait que la formule de Héron fournit l'aire s d'un triangle de côtés a , b et c sous la forme $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $p = 1/2(a+b+c)$ est le demi-périmètre du triangle. En écrivant plutôt cette formule de Héron sous la forme équivalente suivante

$$s^2 - p(p-a)(p-b)(p-c) = 0,$$

¹⁰Pour un exposé complet sur la notion de volume dans les classes élémentaires, la référence de base est le cours de Lebesgue [Leb1]. Pour une présentation économique de la notion de volume d'un polyèdre, voir l'article de Henri Cartan [Car], qui s'inspire largement du texte de Lebesgue. Dans son récent ouvrage *Mathématiques d'écoles* ([P]), D. Perrin reprend toutes ces idées, qui sont donc facilement accessibles à tous, de la Maternelle à l'Université.

et en développant $p(p-a)(p-b)(p-c)$, on voit que l'aire du triangle est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment en fonction des carrés des longueurs des côtés du triangle.

Une formule analogue existe pour l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants de l'espace euclidien de dimension n . Soit (x_0, x_1, \dots, x_n) un repère affine de l'espace euclidien E . Posons $d_{ij} = |x_i - x_j|$ et introduisons le déterminant d'ordre $n+2$

$$\Gamma = \Gamma(x_0, x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d_{10}^2 & d_{20}^2 & \dots & d_{n0}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{21}^2 & \dots & d_{n1}^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La formule de Cayley-Menger affirme que, à un facteur de normalisation près, ce déterminant calcule le volume de l'enveloppe convexe de ces $n+1$ points (voir la géométrie de Berger, 9.7.3.3). Plus précisément, si V désigne ce volume, on a

$$\Gamma(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n+1} \times 2^n \times (n!)^2 \times V^2.$$

En particulier, le volume est bien racine d'une équation polynomiale dont les coefficients sont des fonctions des carrés des longueurs de côtés de cette enveloppe convexe.

Pour $n=2$ prenons les conventions suivantes sur un triangle (ABC) .

$x_0 = C$, $x_1 = B$, $x_2 = A$, $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On obtient

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{pmatrix} = a^4 - 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2,$$

et la formule de Cayley-Menger n'est autre que la formule de Héron.

Pour $n=3$, la formule de Cayley-Menger donne une expression du volume d'un tétraèdre en fonction des carrés des longueurs des arêtes du tétraèdre, formule peut-être connue depuis Tartaglia ($\simeq 1499-1557$)¹¹

La démonstration de la conjecture du soufflet repose sur une généralisation de cette formule de Cayley-Menger. Cette généralisation s'énonce ainsi.

Théorème (Sabitov, 1998). *Soit P un polyèdre de volume V . Il existe un polynôme dont les coefficients s'expriment en fonction des carrés des longueurs des arêtes de P et dont le volume V de P est une racine.*

¹¹J.- M. Schlenker affirme ([S], 2.2) que cette formule "était apparemment connue de Tartaglia, et probablement avant lui, et a été redécouverte en particulier par Euler" mais il ne nous propose aucune référence précise permettant de vérifier cette affirmation. Le titre de l'article de I. Sabitov ([Sa]) fait lui aussi explicitement référence à Tartaglia. Nous laissons aux historiens le soin de trancher ce point.

À partir de ce résultat, la démonstration de la conjecture du soufflet est immédiate : le volume, étant racine d'une équation polynomiale, ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Mais étant une fonction continue du temps durant la flexion, cette fonction ne peut être que constante. Signalons quand même que la construction de polynômes satisfaisant le résultat de Sabitov n'est nullement évidente (Un polynôme satisfaisant ces conditions n'est pas unique, son degré peut varier, etc...).

4. Problèmes ouverts sur les polyèdres.

Les angles dièdres sont d'une importance capitale dans la démonstration du théorème de Cauchy. Voici un autre exemple où les angles dièdres jouent un rôle fondamental.

Lorsqu'on découpe un polyèdre P en un nombre fini de morceaux par des sections planes et qu'on rassemble tous les morceaux du puzzle ainsi obtenu en un second polyèdre P' , il est évident que P' a le même volume que P . Le troisième des problèmes exposés par Hilbert au congrès des mathématiciens de 1900 posait la question de la réciproque. La formulation de Hilbert est la suivante ([H]).

“III. De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales.

Gauss exprime, dans deux lettres à Gerling, son regret que certains théorèmes de la géométrie des solides dépendent de la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire, pour employer la locution moderne, de l'axiome de continuité (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier le théorème d'Euclide (XII, prop. 5) selon lequel deux pyramides de même hauteur à base triangulaire sont dans le même rapport que leurs bases. Mais le problème analogue pour les aires planes a été complètement résolu; Gerling a aussi réussi à démontrer l'égalité des volumes de deux polyèdres symétriques au moyen d'une subdivision en parties superposables (par déplacement). Cependant, il me semble impossible de prouver en général de cette manière le théorème d'Euclide cité plus haut, et il s'agirait de donner une démonstration rigoureuse de cette impossibilité. une telle démonstration serait obtenue, si nous réussissions à trouver deux tétraèdres de même base et de même hauteur, qui ne se subdivisent en aucune manière en tétraèdres superposables, et qui aussi ne se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible.”

On voit ici que Hilbert formule très clairement les notions d'équidécomposabilité et d'équicomplémentarité qu'on retrouve dans tout exposé sur ce sujet. Nous ne commenterons pas ce texte riche. Nous nous contentons de proposer une paraphrase du problème posé¹².

Si P et P' sont deux polyèdres de même volume, existe-t-il des découpages finis de P et P' en polyèdres Q_i et Q'_i , $1 \leq i \leq n$,

$$P = Q_1 \cup \dots \cup Q_n,$$

$$P' = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_n$$

¹²Nous recommandons la lecture aisée du mémoire de Licence [G-S] pour une présentation élémentaire de ce troisième problème de Hilbert.

et des isométries de l'espace g_i telles que $g_i(Q_i) = Q'_i$ pour $1 \leq i \leq n$?

Assez vite, l'un de ses élèves, Max Dehn montra que cette question admet une réponse négative. M. Dehn introduit un invariant, appelé aujourd'hui invariant de Dehn, dont l'égalité est une condition nécessaire à l'existence d'un découpage et recollement entre deux polyèdres donnés. Cet invariant lui a permis de contruire un contre-exemple dès 1902. Cet invariant se construit aujourd'hui rapidement grâce au produit tensoriel $G \otimes H$ de deux groupes abéliens G et H (notion inexistante à l'époque de Dehn, ce qui rendait son invariant difficile à comprendre).

Le produit tensoriel $G \otimes H$ de deux groupes abéliens G et H est le quotient du groupe abélien libre engendré par les couples (g, h) , avec $g \in G$ et $h \in H$, par le sous-groupe T de ce groupe abélien libre engendré par les éléments de la forme suivante :

$$\begin{aligned} &(g_1 + g_2, h) - (g_1, h) - (g_2, h), \\ &(g, h_1 + h_2) - (g, h_1) - (g, h_2), \\ &n(g, h) - (ng, h), \\ &n(g, h) - (g, nh). \end{aligned}$$

On note $g \otimes h$ la classe modulo T du couple (g, h) . Dans le groupe $G \otimes H$, on a donc la relation de \mathbf{Z} -linéarité $n(g \otimes h) = ng \otimes h = g \otimes nh$.

Pour chaque arête a d'un polyèdre P , notons $\ell(a)$ la longueur de cette arête et $\delta(a)$ l'angle dièdre de cette arête. À chaque arête a d'un polyèdre P , Dehn associe l'élément $\ell(a) \otimes \delta(a)$ du groupe

$$\mathbf{R} \otimes \mathbf{R} / \pi \mathbf{Z}.$$

En sommant sur l'ensemble \mathcal{A} de toutes les arêtes du polyèdre, on obtient un élément

$$d(P) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \ell(a) \otimes \delta(a)$$

du groupe $\mathbf{R} \otimes \mathbf{R} / \pi \mathbf{Z}$.

Définition. L'invariant $d(P)$ ci-dessus s'appelle l'invariant de Dehn du polyèdre P .

Pour se familiariser avec cet invariant, calculons le dans deux cas simples mais importants. Un élément du groupe $\mathbf{R} \otimes \mathbf{R} / \pi \mathbf{Z}$ est somme de symboles de la forme $\ell \otimes \delta$ avec $\ell \in \mathbf{R}$, $\delta \in \mathbf{R} / \pi \mathbf{Z}$. De la relation $\ell n \otimes \delta = \ell \otimes n\delta$ pour $n \in \mathbf{Z}$, on déduit immédiatement la relation $\ell r \otimes \delta = \ell \otimes r\delta$ pour $r \in \mathbf{Q}$. Il est commode de se souvenir que $\ell \otimes \delta = 0$ si et seulement si $\ell = 0$ ou δ / π appartient à \mathbf{Q} .

Pour un cube C d'arête de longueur ℓ , chaque angle dièdre vaut $\pi/2$ donc on a

$$d(C) = 8\ell \otimes \pi/2 = 4\ell \otimes \pi = 0.$$

Pour un tétraèdre régulier T d'arêtes de longueur ℓ , chaque angle dièdre vaut $\arcsin 1/3$, donc on a $d(T) = 6\ell \otimes \alpha$ avec $\alpha = \arcsin 1/3$. Mais α/π est irrationnel¹³, donc

$$d(T) \neq 0.$$

¹³En effet, supposons $\alpha = \arcsin 1/3$ tel que $\alpha/\pi = p/q$. Alors $\cos(q\alpha) = \pm 1$. Mais par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\cos(n\alpha) = a_n 3^{-n}$ avec a_n non multiple de 3. Pour $n = q$, on obtient l'absurdité recherchée.

Théorème (Dehn, 1901).

Soient P et P' deux polyèdres de l'espace euclidien. Pour qu'il existe un découpage et recollement permettant de passer de P à P' , il est nécessaire que les invariants de Dehn $d(P)$ et $d(P')$ coïncident.

En particulier, un cube et un tétraèdre régulier de même volume n'ayant pas même invariant de Dehn, il est vain de rechercher un découpage et recollement menant de l'un à l'autre.

La réponse complète au problème de Hilbert s'énonce sous la forme du beau résultat suivant.

Théorème de Sydler (1965).

Deux polyèdres de l'espace de dimension 3 peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre par découpage et recollement si et seulement si ces deux polyèdres ont même volume et même invariant de Dehn.

Voir l'article [Cat] de J-L. Cathelineau pour une démonstration moderne de ce théorème dans laquelle l'énoncé géométrique de Sydler se réduit à la nullité d'un groupe d'homologie...

Comme le souligne D. Hilbert, dans le plan, la situation est radicalement simplifiée : un théorème démontré en 1832 par Bolyai¹⁴ affirme que deux polygones de même aire peuvent toujours être obtenus l'un à partir de l'autre par un découpage et recollement¹⁵ et l'invariant de Dehn est inutile. En revanche, il n'est pas toujours aisé de trouver de belles dissections. Le jeu de Tangram fournit une grande variété de découpages tous réalisés à partir de sept pièces élémentaires. Le célèbre puzzle de Dudeney, transformant un carré et un triangle équilatéral de même aire mérite également notre admiration.

Les polyèdres nous réservent encore de belles incertitudes. A ce jour, on ignore la réponse aux questions suivantes.

Pour tout polyèdre flexible, l'invariant de Dehn reste-t-il constant lors de la flexion?

En vertu du théorème du soufflet et du théorème de Sydler, une réponse positive à cette question signifierait que pour toute position initiale P_1 et pour toute position finale P_2 choisies parmi les formes possibles du polyèdre flexible P , il existerait un découpage fini de P_1 permettant de reconstruire P_2 . Une infinité de puzzles serait contenue dans ce polyèdre flexible...

¹⁴Il s'agit de Wolfgang Farkas Bolyai (1775-1856), ami de Gauss et père de Janos Bolyai (1802-1860). Le fils est plus connu pour sa contribution à la géométrie non euclidienne. Je ne résiste pas au plaisir de diffuser un extrait de correspondance entre Bolyai le père, lui même auteur d'une théorie des parallèles, et son fils. Le père bienveillant écrit au fils le 4 avril 1820 : "Tu ne devras pas t'engager sur ce chemin pour mettre à l'épreuve les parallèles; je connais ce chemin jusqu'au bout – moi aussi j'ai mesuré cette nuit sans fond et elle a éteint toute lumière et toute joie de ma vie – je t'abjure par le nom de Dieu, laisse la théorie des parallèles en paix." Mais le 3 novembre 1823, le fils désobéissant répond fièrement : "J'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui; il serait à jamais regrettable si elles étaient perdues. Lorsque vous les verrez, vous les reconnaîtrez aussi. En attendant, je ne puis ici dire autre chose que ceci : j'ai du néant tiré un nouvel univers. Tout ce que je vous ai communiqué jusqu'ici n'est qu'une maison de cartes, comparé à cette tour" ([E-S]).

¹⁵voir [P], p. 223 pour une démonstration.

Deux polyèdres convexes ayant les mêmes angles dièdres sont-ils semblables?

Cette conjecture de Stoker ([St]) résiste aux assauts des géomètres depuis bientôt 40 ans. Lorsque deux polyèdres convexes ont les mêmes angles dièdres, il s'agit de décider si leurs faces ont les mêmes angles intérieurs.

Bibliographie.

- [A-Z], M. Aigner & G. Ziegler, *Raisonnements divins*, Springer, 2003.
- [Bel], B. Belhoste, *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIX-ième siècle*, Belin, 1985.
- [Ber], M. Berger, *Géométrie*, Cedic, 1977.
- [B-V1], D. Boursin & V. Larose, *Pliages et mathématiques*, ACL, éd. du Kangourou, 2000.
- [B-V2], D. Boursin & V. Larose, *Mathématique et pliages*, ACL, éd. du Kangourou, 2000.
- [Car], H. Cartan, Volume des polyèdres, *Bulletin de l'APMEP*, 192, 1958, *ossia*, *L'Ens. Math.*, 1968, 7-20.
- [Cat], J.-L. Cathelineau, Quelques aspects du troisième problème de Hilbert, *Où en sont les mathématiques*, SMF-Vuibert, 2002, 208-236.
- [Co], R. Connelly, A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra, *Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci.*, **1977**, 333-338.
- [C-S-W], R. Connelly, I. Sabitov & A. Walz, the bellow conjecture, *Beitr. Alg. Geom.*, **38**, 1997, 1-10.
- [E], Euclide, *les Œuvres*, trad. F. Peyrard, 1819, réed. Blanchard, 1966.
- [E']', Euclide, *les Eléments*, traduction Bernard Vitrac, vol. 4, PUF, 2001.
- [E-S], Engel & Stäckel, *Gauss, les deux Bolyai et la géométrie non euclidienne*, Paris, 1897, repris dans *Introduction à l'histoire des sciences*, dir. G. Canguilhem, Hachette, tome 2, 1971, p. 117-118.
- [G], E. Ghys, Le théorème du soufflet, *L'explosion des mathématiques*, SMF-SMAI, 2002.
- [G-S], Ph. Grandemange & P. Schwartz, Aspects classiques du troisième problème de Hilbert, *La gazette des mathématiques*, 52, 1992, 73-86.
- [H], D. Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les 23 problèmes, éd. Gabay.
- [H-G], G. Hon & B. Goldstein, Legendre's revolution (1794) : the definition of symmetry in solid geometry, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **59**, 2005, 107-155.
- [La], I. Lakatos, *Preuves et réfutations*, Hermann, 1984.
- [Le B], Guy Le Berre, *L'évasion des polyèdres*, éd. Mathématiques, 2006.
- [Leb1], H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Blanchard, 1975.

- [Leb2], H. Lebesgue, Octaèdres articulés de Bricard, *L'Ens. Math.*, XIII, 1968, 175-185.
- [Leg], A.-M. Legendre, *Éléments de géométrie*, 11-ième édition, 1817,
<http://gallica.bnf.fr/>
- [M-D], M. Minguin-Debray, *L'atelier des polyèdres*, ACL, éd. du Kangourou.
- [P], D. Perrin, *Mathématiques d'École, nombres, mesures et géométrie*, Cassini, 2005.
- [Sa], I. Sabitov, the generalized Heron-Tartaglia formula and some of its consequences, *Math. Sb.*, **189**, 1998, 105-134.
- [S], J.-M. Schlenker, La conjecture des soufflets, *Astérisque*, **294**, 2004, 77-95.
- [St], J.-J. Stoker, geometrical problems concerning polyhedra in the large, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**, 1968, 119-168.
- [Toile1], <http://www.ac-noumea.nc/math/amc/polyhedr/Wunder.htm>
- [Toile2], http://www.geocities.com/jshum_1999/polyhedra/bricard.htm
- [Toile3], http://www.geocities.com/jshum_1999/polyhedra/steffen.htm
- [Toile4], <http://perso.orange.fr/jean-paul.davalan/geom/poly/index.html>