LOGIQUE & CALCUL

La quête du pavé apériodique unique

Les spécialistes des pavages et des quasi-cristaux espéraient depuis longtemps découvrir un pavé unique avec lequel le pavage du plan serait nécessairement non périodique. Un tel pavé a été trouvé... enfin, presque.

Jean-Paul DELAHAYE

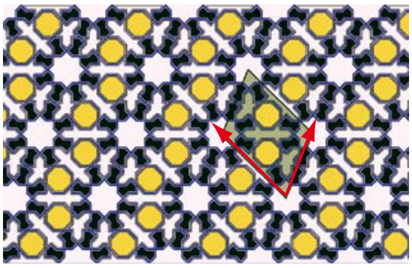
Des contraintes locales ont-elles des conséquences à l'infini ? La théorie des pavages apériodiques a examiné cette question et un domaine de la cristallographie en est né, amenant une interaction nouvelle des mathématiques et de la physique. Dernier résultat : un pavé décoré interdit à lui seul la périodicité ! Ainsi, les aspects ludiques et sérieux de la géométrie se mêlent pour donner de nouveaux outils aux physiciens.

Périodiques ou non ?

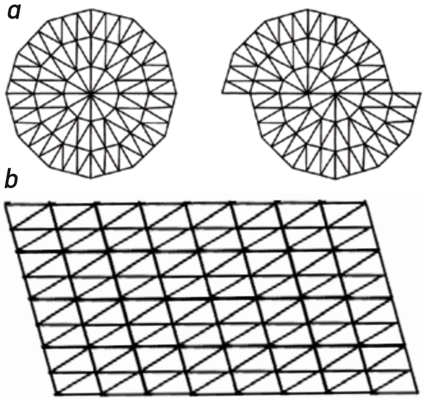
Dans un pavage périodique du plan, une partie finie, en forme de parallélogramme, permet de paver totalement le plan en utilisant deux translations (un pavage est périodique s'il existe deux vecteurs de translation non colinéaires qui le laissent invariant) *(voir la figure 1)*.

Sauf de rares exceptions, les pavages décoratifs utilisent des motifs périodiques, sans doute pour des raisons de facilité d'impression ou d'assemblage. Il est cependant facile de concevoir des motifs non périodiques qui pavent le plan. Deux exemples très simples utilisent un pavé en forme de triangle isocèle, dont l'angle au sommet est égal à 30° ; ce pavé peut bien sûr composer un pavage périodique, comme c'est le cas de tout triangle *(voir la figure 2)*.

On a longtemps pensé que tout ensemble de pavés qui permet de paver le plan autorise aussi un pavage périodique.



1. UN EXEMPLE DE PAVAGE PÉRIODIQUE du plan. Ce pavage peut être construit en dupliquant le parallélogramme en gris et en le translatant selon les deux vecteurs *(en rouge)* construits sur ses côtés.



2. DEUX EXEMPLES de pavage apériodique du plan *(a)* dont le pavé élémentaire est un triangle isocèle d'angle au sommet égal à 30°. Ce pavé permet aussi de recouvrir périodiquement le plan *(b)*.

Personne ne réussissant à démontrer cette affirmation, on s'est demandé s'il existait des ensembles de pavés conduisant uniquement à des pavages non périodiques, ce que nous dénommerons des « ensembles de pavés apériodiques ».

Si un tel ensemble existe, alors des contraintes géométriques locales (que des pavés se joignent parfaitement) imposent une propriété globale, l'apériodicité, ce qui n'est pas une évidence (c'est, d'ailleurs, impossible en dimension 1).

Le pavage, un problème indécidable

La solution est issue d'une question algorithmique. Les logiciens, dont en particulier Hao Wang, un confident de Kurt Gödel, se sont posé une question : un ensemble de formes géométriques élémentaires étant donné, peut-on savoir par un moyen systématique, c'est-à-dire par un algorithme, si oui ou non on pourra couvrir tout le plan avec des exemplaires de ces formes sans chevauchement et sans laisser de vide ? C'est le problème de la « décidabilité du pavage ». Il est aussi dénommé « problème des dominos », car une version simplifiée ne fait intervenir que des dominos carrés à côtés colorés que l'on dispose en tenant compte des couleurs (ce que l'on ramène à des pavés sans couleur en déformant les côtés, pour transformer les contraintes de couleur en contraintes de forme).

Si un ensemble fini donné de pavés ne pave pas le plan, on s'en aperçoit en un temps fini, mais non connu à l'avance : on essaie toutes les combinaisons pour paver un disque de rayon 1, puis 2, etc. Si l'ensemble de pavés ne permet pas de paver le plan, on finit par rencontrer un blocage (quand le disque n'est pavable avec aucune combinaison de pavés) et on sait alors qu'il n'existe pas de pavage possible.

De même, si l'on sait qu'un ensemble fini de formes pave le plan de manière périodique, on peut réaliser ce pavage en essayant des formes de plus en plus nombreuses de l'ensemble ; on découvre alors nécessairement comment réaliser le pavage périodique, car vient un moment où l'on tombe sur la partie finie qui recouvre le plan par translation.

Il résulte de ces deux résultats algorithmiques positifs que :
– soit « tout ensemble de pavés qui pave le plan peut le faire de manière périodique » et, dans ce cas, le problème du pavage est décidable (on essaie simultanément de paver des disques de plus en plus grands et de trouver un motif périodique composé de pavés pris dans l'ensemble, et on est assuré d'arriver à une conclusion en un temps fini) ;
– soit « il existe des ensembles de pavés qui pavent le plan, mais qui ne peuvent pas le paver de manière périodique ».

Dit autrement, si le problème du pavage est algorithmiquement indécidable, alors il existe des ensembles de pavés apériodiques.

À l'heure de Berger

La résolution de l'énigme est due à Robert Berger. En 1964, dans sa thèse de doctorat à l'Université Harvard, il montra qu'on peut simuler n'importe quel calcul en choisissant soigneusement un ensemble fini de pavés et en tentant d'en recouvrir le plan. Si la tentative de pavage n'est jamais bloquée, cela signifie que le calcul se poursuit indéfiniment ; si l'on tombe sur un blocage, cela signifie que le calcul est terminé. Comme on sait depuis les travaux d'Alan Turing de 1936 que l'arrêt d'un programme est indécidable, il résulte du système de

La fléchette et le cerf-volant de Penrose

Durant la décennie 1970-1980, le physicien britannique Roger Penrose découvrit des ensembles de pavés apériodiques divers : ils permettent de paver le plan, mais uniquement de façon apériodique. Il réussit à en proposer ne comportant que deux pavés.

L'ensemble *kite-dart* (cerf-volant et fléchette) est simple. Il n'y a que deux sortes de côtés dont le rapport des longueurs est le nombre d'or $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Sans contraintes particulières, ces deux formes pavent le plan de manière périodique : on place la fléchette dans le creux du cerf-volant, ce qui donne un quadrilatère avec lequel on pave périodiquement le plan. En revanche, en colorant les sommets de la fléchette et du cerf-volant et en ne considérant comme acceptables que les pavages où on fait se correspondre des sommets de même couleur, on obtient uniquement des pavages apériodiques. La contrainte des sommets colorés se traduit en contrainte de forme en redessinant les côtés.

On obtient ainsi deux formes qui pavent le plan, mais qui ne le font que d'une manière non périodique : on a un ensemble apériodique à deux éléments. Une question non résolue aujourd'hui est si l'on peut trouver une forme unique qui pave le plan et qui ne le fait que de manière apériodique.

Voici quelques propriétés des pavages convenables obtenus avec la fléchette et le cerf-volant.

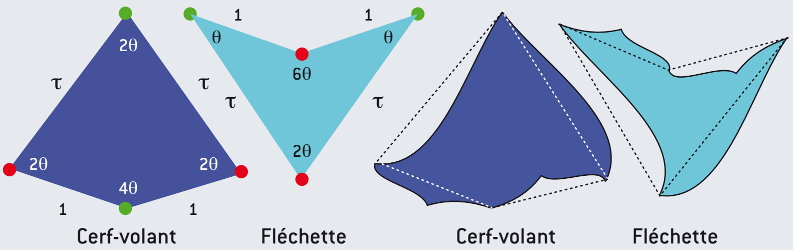
– Un pavage convenable ne possède jamais de symétrie de translation (non seulement il n'existe pas deux vecteurs de translation le laissant invariant, mais il n'en existe pas même un seul).

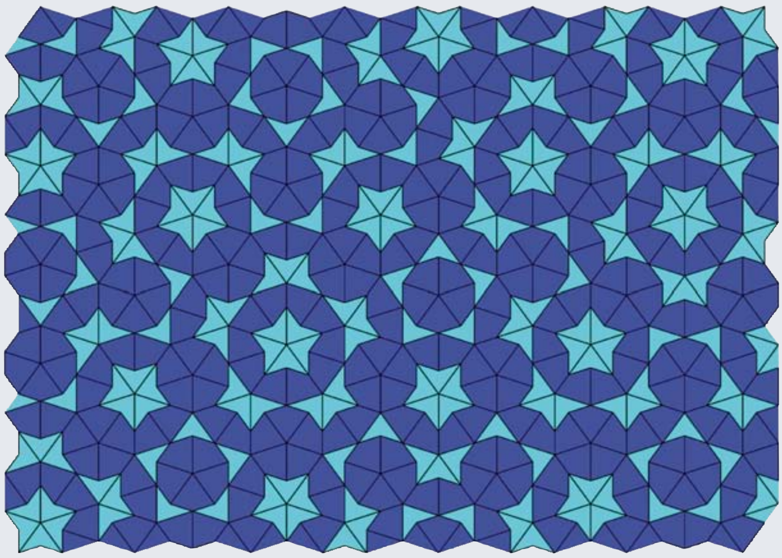
– Toute partie finie de tout pavage convenable se retrouve une infinité de fois dans tout autre pavage ; en ce sens, tous les pavages convenables se ressemblent.

– Il existe une infinité non dénombrable de pavages convenables possibles (tous apériodiques) ne se ramenant pas l'un à l'autre.

– Dans tout pavage convenable, il existe des parties finies arbitrairement grandes qui possèdent une symétrie de rotation d'ordre 5 (rotation d'angle $2\pi/5$).

– Dans tout pavage convenable, si l'on prend des disques de plus en plus grands, le rapport entre le nombre de cerfs-volants contenus dans le disque et le nombre de fléchettes tend vers le nombre d'or τ.





simulation de R. Berger que le problème du pavage est indécidable... et qu'il existe donc des ensembles de pavés apériodiques.

N'est-il pas remarquable que la démonstration de l'existence d'ensembles de pavés apériodiques provienne d'une préoccupation théorique concernant la décidabilité algorithmique, théorie que certains pensent sans intérêt pratique ?

Mais on attend des théoriciens qu'ils sachent traduire concrètement leurs préoccupations abstraites. R. Berger, exploitant sa démonstration d'indécidabilité, en a tiré la définition effective d'un ensemble de pavés forçant la non-périodicité. Dans sa thèse, il construisit un tel jeu de 20 426 formes. Dès lors, on commença à rechercher des jeux de pavés apériodiques comportant un plus petit nombre de formes de base.

R. Berger réduisit ses 20 426 pavés à 104. Donald Knuth (l'informaticien créateur du traitement de texte mathématiques *TeX*) amena alors le record à 92. D'année en année, des ensembles apériodiques plus petits ont été découverts. On passa ainsi à 40 (H. Läuchi en 1966), à 35 (Raphael Robinson en 1967), à 34 (Roger Penrose en 1973), à 16 (Robert Ammann en 1978). En 1971, Robinson découvrit un ensemble de six pavés apériodiques *(voir la figure 3a)*. La démonstration de l'apériodicité, dans ce cas comme dans bien d'autres, se fait en ajoutant des tracés colorés sur les pavés *(voir la figure 3b)*.

Quand on compose un pavage, ces tracés forment deux systèmes de carrés emboîtés, en orange et en vert *(voir la figure 3c)*. Les carrés ainsi créés sont de taille aussi grande qu'on le veut et on montre que c'est nécessairement le cas pour tout pavage réalisé avec les six pavés de Robinson. Si un pavage périodique était possible avec ces pavés, il y aurait une taille maximale de carrés. Le fait qu'il existe des carrés de taille aussi grande qu'on le veut prouve que tous

Des pavages plus ou moins compliqués

Quasi-périodique signifie presque périodique et cela suggère une hiérarchie des pavages non périodiques. Un pavage est quasi-périodique si, pour tout motif *M* qui y apparaît, il existe un entier *n* tel que *M* apparaît dans tout motif couvrant un disque de rayon *n*. Les pavages quasi-périodiques sont donc ceux qui font apparaître tout motif de manière régulière et pas trop espacée. Ils sont un peu moins simples que les pavages périodiques, mais leur désordre reste modéré. Tous les pavages réalisables avec les pavés de Penrose sont quasi-périodiques. Dans le cas de pavages quasi-périodiques de Penrose *(photographies ci-dessous)*, tout motif fini que l'on trouve dans l'un se retrouve dans tout autre. Il est facile de concevoir des pavages qui ne sont pas quasi-périodiques. C'est par exemple le cas des deux pavages non périodiques à base de triangles ayant une sorte de point central *(voir la figure 2)*. Une question naturelle se pose : puisqu'on peut forcer la non-périodicité, peut-on forcer la non-quasi-périodicité ?

Autrement dit : peut-on trouver un ensemble de pavés qui pavent le plan, mais seulement en dessinant des pavages qui ne sont pas quasi-périodiques (contenant donc une sorte de grand désordre) ? La réponse est négative : si un ensemble de pavés recouvre le plan, alors il peut en particulier le faire de manière quasi-périodique. Ce beau théorème, que le chercheur français Bruno Durand a établi en 1999, signifie que le type de désordre exprimé par la propriété de non-quasi-périodicité ne peut pas être forcé par des règles locales.

La non-quasi-périodicité est une forme de désordre, mais la non-calculabilité aussi, et cette fois on peut la « forcer ». William Hanf et Dale Myers ont en effet démontré en 1974 qu'il existe des ensembles de pavés qui pavent le plan, mais ne le font que de manière non calculable : aucun algorithme n'indique comment le faire ; pour paver le plan, il faut procéder au hasard et avoir de la chance !

Dans cette veine, un autre résultat a été démontré en 2008 par B. Durand, Leonid Levin et Alexander Shen. Il pousse à son extrême cette étude du forçage par un ensemble fini de pavés. Son énoncé indique qu'il existe des ensembles de pavés qui forcent une croissance rapide de la complexité des dessins produits par tout pavage.

Tout pavage possible est tel que pour en décrire un motif couvrant un disque de rayon *n*, il faut un programme de longueur au moins proportionnelle à *n* (la complexité de Kolmogorov du dessin est au moins proportionnelle à *n*, c'est-à-dire au moins égale à Cn pour une certaine constante C). Un tel ensemble de pavés force donc une grande complexité des dessins.

les pavages du plan réalisables avec les six formes de Robinson sont non périodiques.

Grâce à R. Penrose, ce bel ensemble de six pavés apériodiques fut d'abord battu par un ensemble de trois pavés, puis par un ensemble de deux pavés *(voir l'encadré page 125)*.

En 1979, R. Penrose, fier de sa découverte, fit breveter les motifs produits par ses pavés apériodiques – une procédure d'appropriation de formes géométriques sur laquelle on peut s'interroger ! En 1997, l'épouse de R. Penrose acheta par hasard des rouleaux de papier hygiénique produits par la firme *Kleenex* dont le motif décoratif était l'un des pavages brevetés. Sans doute furieux de voir sa merveilleuse découverte mathématique chargée d'une tâche indigne, R. Penrose engagea des poursuites contre la firme indélicate. Il gagna. Carl Morris raconte qu'en 2002, un de ses professeurs de mathématiques de l'Université de Cardiff, qui avait pu acheter quelques précieux rouleaux avant leur retrait des magasins, offrait une feuille décorée aux étudiants obtenant les trois meilleures notes à ses examens.

Des pavages aux quasi-cristaux

Les pavages apériodiques ont longtemps été considérés comme une simple curiosité mathématique sans applications autres que ludiques ou esthétiques. Cependant, en 1982, Dan Shechtman, chercheur israélien alors invité à l'Institut américain des normes et de la technologie (le NIST), s'aperçut qu'un alliage d'aluminium et de manganèse produit, quand il est éclairé par des rayons X monochromatiques, des figures de diffraction ayant une symétrie d'ordre cinq, c'est-à-dire analogue à celle d'un pentagone régulier *(voir la figure 4)*. C'était fort étonnant, car aucune structure cristalline périodique ne peut produire de telles figures de diffraction.

Cette découverte des « quasi-cristaux » était si inattendue que le chercheur a eu du mal à publier sa découverte. Finalement admise et confirmée, elle conduira en 1992 à la modification de la définition des cristaux par l'Union internationale de cristallographie, définition qui ne retient que le caractère discret de la figure de diffraction des rayons X, sans imposer d'ordre aux symétries observées. Et en 2011, D. Shechtman reçut le prix Nobel de physique pour sa découverte.

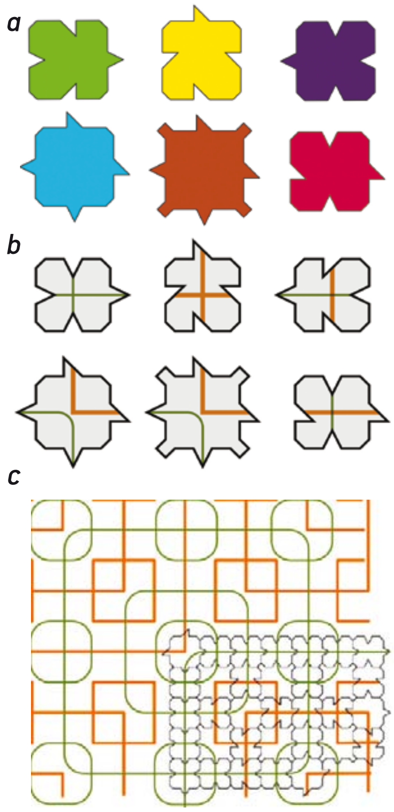
Les premiers quasi-cristaux étaient tous artificiels, mais en 2009 un quasi-cristal naturel a été découvert dans les montagnes de Koriakie, en Russie. Son origine extraterrestre ne semble faire aucun doute !

Le lien avec les pavages apériodiques, dont certains sont construits à partir de pavés ayant une symétrie d'ordre 5, ou liés au pentagone régulier (comme c'est le cas pour le pavage *kite-dart* de Penrose à deux pavés), s'est révélé essentiel pour comprendre la nature des quasi-cristaux. Des centaines d'articles scientifiques ont été publiés sur le sujet et, aujourd'hui, tout livre de cristallographie consacre des pages aux quasi-cristaux et aux pavages apériodiques. Parmi les points importants, mentionnons la compréhension que les pavages quasi-périodiques proviennent parfois de la projection de structures périodiques appartenant à des espaces de dimension supérieure.

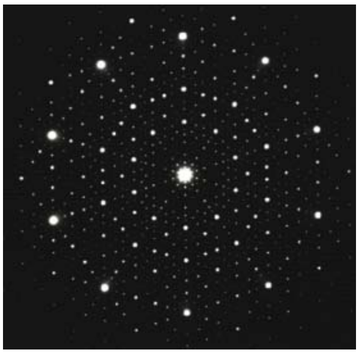
En informatique, les pavages apériodiques se sont révélés intéressants dans le domaine du graphisme et de la synthèse d'images. Pour engendrer des textures ou pour disposer des séries de nombreux objets dans une image, la solution la plus simple consiste à recopier périodiquement une structure de taille limitée. La répétition périodique, trop visible, donne un aspect peu naturel au résultat *(voir la figure 5)*. D'où l'idée d'utiliser un pavage apériodique qui évite d'avoir à utiliser de l'aléa ou du pseudo-aléa, comme l'ont montré Adrien Peytavie, Éric Galin, Jérôme Grosjean et Stéphane Merillou en 2009.

Forcer l'apériodicité avec un pavé unique ?

Indépendamment des applications à la cristallographie et à l'infographie, une question simple et fondamentale est restée posée depuis la découverte par R. Penrose d'un ensemble de deux pavés forçant la non-périodicité : peut-on forcer la non-périodicité avec un seul pavé ? Ce problème porte le



3. LES SIX PAVÉS DE ROBINSON *(a)* ne peuvent construire qu'un pavage apériodique. Pour le prouver, on leur superpose des tracés colorés *(b)* qui, lorsqu'on assemble les pavés *(c)*, forment des carrés aussi grands que l'on veut.



4. UNE FIGURE DE DIFFRACTION présentant une symétrie d'ordre 5.

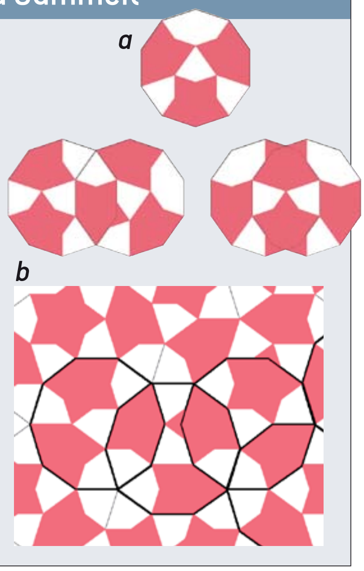
nom de « problème *ein stein* » (une pierre en allemand, clin d'œil à Einstein).

En dimension 3, c'est possible, comme Peter Schmitt et John Conway l'ont montré assez facilement au début des années 1990 à l'aide d'un biprisme *(voir la figure 6)*. Chaque couche est périodique, mais en choisissant bien l'angle créé entre les couches (angle déterminé par la forme du biprisme), l'ensemble du pavage de l'espace n'est pas périodique.

En dimension 2, le polygone coloré découvert en 1996 par l'Allemande Petra Gummelt, de l'Université de Greifswald, est une petite merveille assez proche de la solution : il s'agit d'un décagone régulier dont la surface est colorée avec deux couleurs *(voir l'encadré ci-contre)*. On cherche à recouvrir le plan avec le décagone. On autorise les chevauchements, à condition que les parties chevauchantes soient colorées de la même façon, ce qui est une contrainte locale proche de la contrainte de recouvrement sans chevauchement.

Le polygone de Petra Gummelt

Le polygone coloré de Petra Gummelt est presque une solution de l'énigme du pavé unique apériodique (problème *ein stein*). C'est bien une forme qui force la non-périodicité, mais, pour l'utiliser, on change un peu les règles du jeu. On cherche à recouvrir le plan (aucun espace ne doit être oublié) par des copies du décagone en s'imposant que les parties colorées de deux décagones qui se chevauchent (dans ce cas, c'est autorisé) soient de la même couleur. Cette règle simple locale force les recouvrements du plan à être non périodiques. C'est un exemple aussi simple que ceux de Penrose (avec lesquels il n'est pas sans liens) de règle locale ayant un effet à l'infini.



Le décagone de Petra Gummelt avec deux façons convenables de faire se chevaucher des copies de ce décagone *(a)* et un exemple de recouvrement du plan par des copies se chevauchant convenablement *(b)*.

Des solutions avec chevauchements

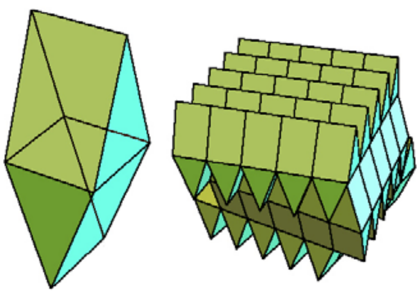
On montre que tout le plan peut ainsi être recouvert et qu'alors, c'est nécessairement de manière apériodique. Des liens ont été établis entre ce décagone et les pavages de Penrose. De plus, ce décagone est d'une utilité directe pour comprendre certains quasi-cristaux. Malheureusement, les chevauchements autorisés interdisent qu'on le considère comme la solution attendue au problème *ein stein*.

En 2010, Joan Taylor, une habitante de la lointaine Tasmanie (île célèbre pour son loup disparu), après de longs essais s'étalant sur plusieurs années, mit au point un hexagone coloré et des règles locales pour paver le plan avec des copies de cet hexagone. Elle prouva que tout pavage qui respecte les règles est non périodique *(voir l'encadré page ci-contre)*.

Le fait que les règles soient locales a laissé espérer un moment qu'on pourrait, comme pour les tuiles de Penrose, traduire les règles d'assemblage en déformant les côtés de l'hexagone pour obtenir un pavé unique (sans dessin, ni couleur) dont la seule règle « recouvrir sans chevauchement ni espace vide » forcerait la non-périodicité. Personne n'a réussi cette traduction, que l'on considère maintenant impossible.

Les tentatives de traduction ont tout de même donné deux « quasi-solutions ». La première propose un pavé unique (sans dessin ni couleur) en plusieurs morceaux disjoints considérés comme liés rigidement comme par une force magique, qui pave le plan et ne le fait que de manière apériodique. La seconde introduit une épaisseur (non constante) et donne une sorte de pavé tridimensionnel qui pave le plan uniquement de façon apériodique. Ce succès remarquable laisse malheureusement un goût d'inachevé et l'on s'interroge aujourd'hui pour savoir si, en définitive, un « pavé pur » (sans dessin ni couleur) forçant la non-périodicité est possible. Une course est donc lancée entre ceux qui tentent encore de trouver un pavé unique apériodique et ceux qui tentent de démontrer que ce pavé n'existe pas. ■

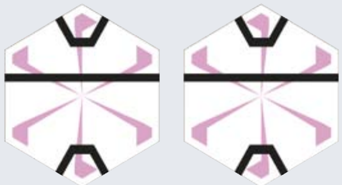
5. UNE TEXTURE FORMÉE avec des éléments disposés périodiquement *(en haut)* a un aspect peu naturel, contrairement à une disposition apériodique *(en bas)*.



6. POUR L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS, Peter Schmitt et John Conway ont montré qu'avec un biprisme de forme bien choisie, on peut remplir tout l'espace, mais uniquement de façon apériodique. L'analogue en deux dimensions existe-t-il ?

Le pavé de Joan Taylor

Le pavé de Taylor est une simple tuile hexagonale décorée. On peut la retourner, mais les motifs décoratifs sont les mêmes des deux côtés, comme si la tuile était en verre et les décorations incorporées dans le verre.

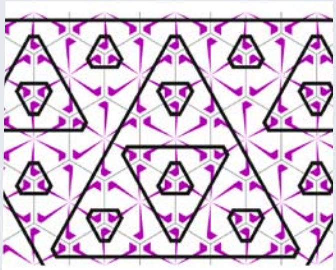


Les contraintes à respecter pour paver le plan sont les suivantes :

– les tuiles doivent être mises côté contre côté ;

– les traits noirs doivent se joindre ;

– lorsqu'on considère le côté d'un pavé quelconque, les deux dessins violets sur les tuiles dont le diamètre est aligné avec le côté doivent avoir des orientations identiques.



La démonstration que tout pavage respectant les règles précédemment édictées est apériodique se fait, comme pour les pavés de Robinson *(voir le texte de l'article)*, en considérant les triangles de toutes tailles que dessinent les traits noirs sur les tuiles jointes.

7. UN HOMMAGE À MARTIN GARDNER, réalisé par Bruce Torrence avec un pavage non périodique constitué de cerfs-volants et de fléchettes convenablement colorés. M. Gardner introduisit ces pavages dans sa rubrique de *Scientific American* en janvier 1977. Ce pavage par des fléchettes et des cerfs-volants a une symétrie d'ordre 5.

■ L'AUTEUR

J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

• J.-Y. Lee et R. Moody, **Taylor-Socolar hexagonal tilings as model sets,** *Symmetry*, vol. 5, pp. 1-46, 2013.

• J. Socolar et J. Taylor, **Forcing non periodicity with a single tile,** *The Mathematical Intelligencer*, vol. 34(1), pp. 18-27, 2012.

• J. Socolar et J. Taylor, **An aperiodic hexagonal tile,** *J. Comb. Theory A*, vol. 118, pp. 2207-2231, 2011.

• J. Taylor, **Aperiodicity of a functional monotile,** 2010, www.math.uni-bielefeld.de/sfb701/preprints/view/420

• A. Musesti et M. Poalini, **The Penrose Tessellation,** 2010 [magnifique film sur les pavés apériodiques de Penrose] : http://penrose.dmf.unicatt.it/

• W. Steurer et S. Deloudi, **Crystallography of Quasicrystals,** Springer, 2009.

• B. Durand *et al.*, **Complex tilings,** *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 73(2), pp. 593-613, 2008.