

L'inversion

Mélanie SEDDA, Arnaud CERCKEL, Benjamin LEGAT, Jules WACQUEZ,

1 avril 2011

Table des matières

I	Introduction	3
II	L'inversion	5
1	Découverte	6
1.1	Qu'est-ce que l'inversion ?	6
1.2	Comment construire un point inverse ?	7
1.3	Recherche d'images et propriétés remarquables	8
1.3.1	Figures inverses d'une même figure	8
1.3.2	Images de deux points	8
1.3.3	Image d'une droite	9
1.3.4	Image d'un cercle	10
1.3.5	Conservation des angles	10
2	Inversion abordée de manière analytique	13
2.1	Inversion dans le plan cartésien	13
2.1.1	Coordonnées de l'image d'un point	13
2.1.2	Vérification de certaines propriétés	13
2.2	Inversion dans le plan complexe	15
2.2.1	Coordonnées de l'image d'un point	15
2.2.2	Vérifications de certaines propriétés	15
2.3	Inversion dans l'espace	17
2.4	Courbes anallagmatiques	18
2.4.1	La strophoïde droite	18
2.4.2	Ouales de Cassini	19
3	Applications	25
3.1	Démonstrations	25
3.1.1	Problème simple	25
3.1.2	Théorème de Ptolémée	26
3.1.3	Feuerbach, le film	28
3.2	Projection stéréographique	34
3.2.1	Comment faire une projection stéréographique ?	35
3.3	Inverseurs	36

3.3.1	Inverseur de Peaucellier	36
3.3.2	Inverseur de Hart	39
III	Conclusion	41
	Avez-vous résolu l'énigme des lions d'Afrique ?	42
4	Avez-vous résolu l'énigme des lions d'Afrique ?	42
5	Bref récapitulatif	43
	Bibliographie	43

Première partie

Introduction

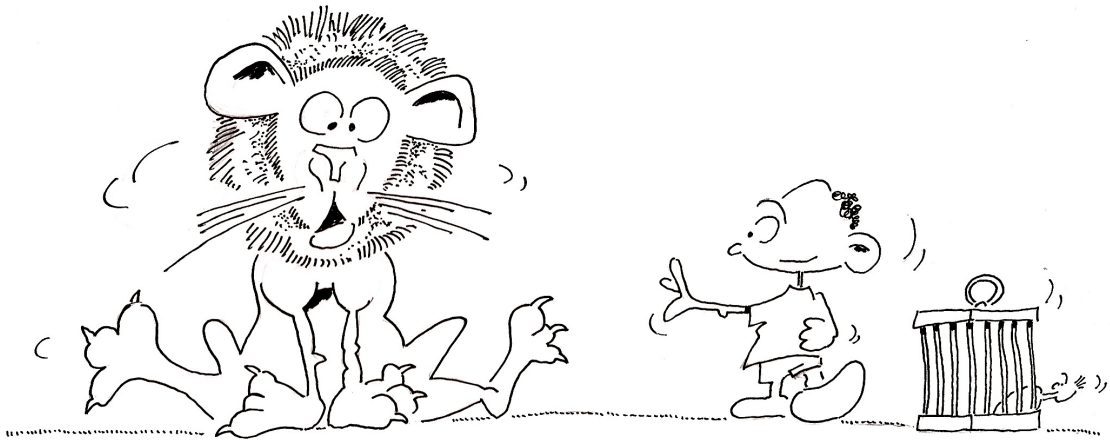
Tout élève de dernière année secondaire a normalement déjà entendu parler de transformations du plan telles que la translation, la rotation, la symétrie orthogonale et l'homothétie. Nous allons traiter ici d'une transformation du plan moins connue mais néanmoins très intéressante : l'inversion.

Nous nous intéresserons, dans un premier temps, à ce qu'est l'inversion et chercherons l'image de différents objets (point, droite, cercle, ...). Cela nous permettra de découvrir les propriétés de cette transformation hors du commun et de présenter ensuite ses diverses applications en géométrie, en mécanique et en cartographie.

Une petite énigme pour commencer : Comment enfermer tous les lions d'Afrique dans une cage ?



solution voir partie III



Deuxième partie

L'inversion

Chapitre 1

Découverte

1.1 Qu'est-ce que l'inversion ?

On donne un point fixe O et un nombre réel non nul p . L'inversion de pôle O et de puissance p , notée $i_{O,p}$, est alors la transformation du plan qui fait correspondre à chaque point M un point M' situé sur OM tel que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p,$$

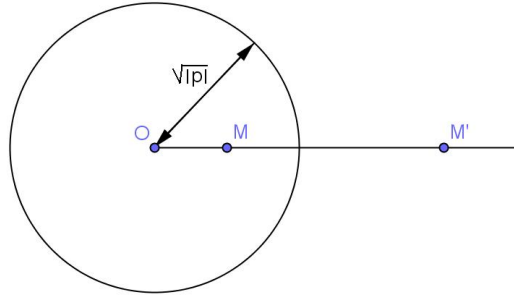
où les distances \overline{OM} et $\overline{OM'}$ sont orientées. Nous écrirons aussi $M' = i(M)$.



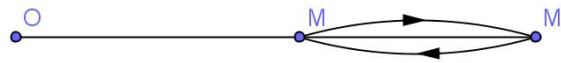
Le point O est le pôle ou centre d'inversion, p est la puissance d'inversion, M et M' sont dits points inverses ou réciproques, et les distances OM et OM' sont appelées rayons vecteurs ou réciproques.

Ainsi, nous pouvons déjà remarquer que si p est positif, les rayons vecteurs OM et OM' sont de même sens et les points M et M' sont donc d'un même côté de O . Si p est négatif, les points M et M' sont alors de part et d'autre du pôle.

Constatons aussi que, pour un pôle et une puissance donnée, tout point M du plan a un inverse unique puisqu'il n'existe qu'un seul point M' situé sur OM tel que $\overline{OM'} = \frac{p}{\overline{OM}}$. Si on trace le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{|p|}$, tout point à l'intérieur du cercle aura son inverse à l'extérieur et réciproquement. On peut dire que l'inversion rapproche ce qui est loin du pôle et éloigne ce qui en est proche. L'image du pôle est quant à elle rejetée en l'infini.



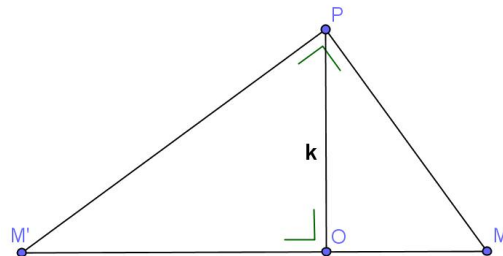
On peut également remarquer que si M' est l'inverse de M , alors M est l'inverse de M' . On dit que l'inversion est une involution car $i[i(M)] = M$.



1.2 Comment construire un point inverse ?

Intéressons nous maintenant à la construction concrète de ce point M' à partir d'un point M , d'un pôle O et d'une puissance p donnés.

Supposons que le point M' soit déjà construit afin d'analyser ses caractéristiques et d'imaginer une méthode pour l'obtenir. Si p est négatif, on peut écrire $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = -k^2$ (en prenant $k = \sqrt{-p}$). Le fait que la puissance soit négative signifie simplement que M et M' sont de part et d'autre de O . On aura donc, en non-orienté, $|OM| \cdot |OM'| = k^2$. Cette formule rappelle fortement le théorème de la hauteur qui dit que, dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypothénuse est égal au produit des segments qu'elle détermine sur celle-ci. Cela signifie qu'en traçant le segment $[OP]$ perpendiculaire à $M'M$ et de longueur k , on obtient un triangle $M'MP$ rectangle en P . On en conclut qu'une manière d'obtenir M' est de construire ce triangle rectangle, c'est-à-dire de tracer une perpendiculaire à OM , d'y placer un point P tel que $|PO| = k$ et enfin de trouver l'intersection de la perpendiculaire à PM avec OM .



Pour p positif, il suffit de faire la construction précédente avec $-p$ et de reporter la longueur $|OM'|$ de l'autre côté de O .

1.3 Recherche d'images et propriétés remarquables

1.3.1 Figures inverses d'une même figure

On peut ensuite imaginer qu'au lieu d'être quelconque, le point M décrit une figure F donnée. Le point M' décrira alors une figure F' . Les figures F et F' sont appelées inverses ou réciproques.

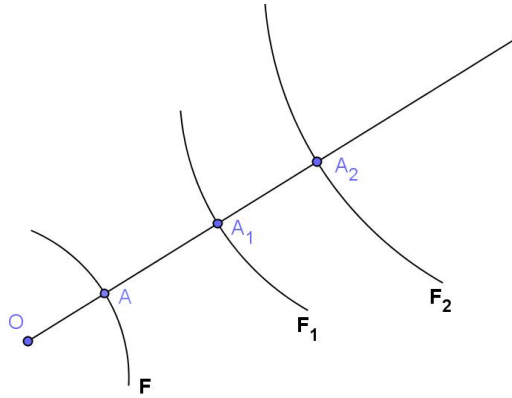
Si F_1 et F_2 sont deux figures inverses d'un même figure F par rapport à un même pôle mais par des puissances p_1 et p_2 distinctes, alors elles sont homothétiques. En effet, considérons un point A de F et A_1 et A_2 les points inverses de A appartenant à F_1 et F_2 respectivement. On a

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA_1} = p_1 \text{ et } \overline{OA} \cdot \overline{OA_2} = p_2$$

D'où

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Les figures F_1 et F_2 sont donc homothétiques, de centre O et de rapport $\frac{p_1}{p_2}$.



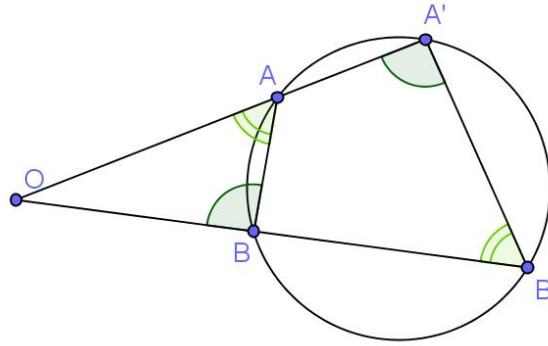
1.3.2 Images de deux points

Prenons maintenant deux points A et B ainsi que leurs inverses respectifs A' et B' , par rapport à un même pôle et une même puissance. On peut alors démontrer que les points A , A' , B et B' sont sur un même cercle. Nous détaillerons ici le cas où p est positif mais la preuve est similaire pour p négatif.

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OA'} &= \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} \end{aligned}$$

De cette égalité, et vu que $\widehat{A'OB'} = \widehat{BOA}$, on déduit que les triangles $A'OB'$ et BOA sont semblables. Donc $\widehat{OA'B'} = \widehat{OBA}$ et $\widehat{OB'A'} = \widehat{OAB}$. Les angles \widehat{OAB} et $\widehat{BAA'}$ étant supplémentaires, il en est de même pour $\widehat{OB'A'}$ et $\widehat{BAA'}$. Ceci prouve que les points A, A', B et B' sont cocycliques puisqu'un quadrilatère est cyclique si et seulement si la somme de deux angles opposés vaut 180° .



Derrière cette démonstration se cache en fait la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle. Nous ne détaillerons pas ce sujet mais signalons juste que la puissance d'un point P par rapport à un cercle est le nombre égal au produit $\overline{PM} \cdot \overline{PN}$, où M et N sont les intersections d'une droite quelconque passant par P et de ce cercle (pourvu que celle-ci le coupe). Puisque ce produit ne dépend pas de la droite choisie, le fait que deux points et leurs inverses soient situés sur un même cercle devient évident.

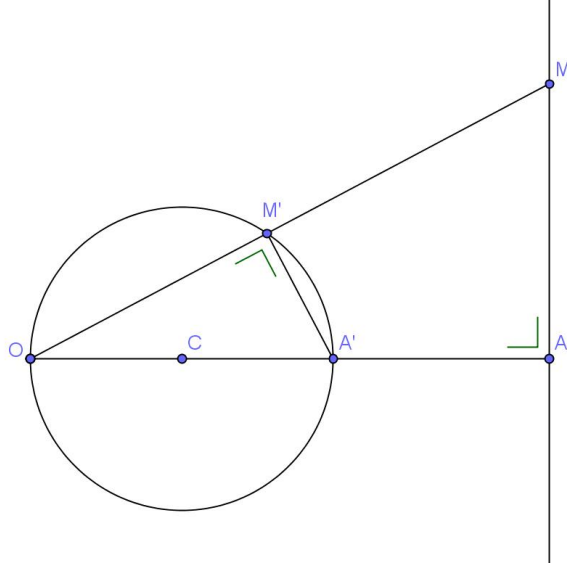
1.3.3 Image d'une droite

Demandons-nous maintenant quelle pourrait bien être l'image d'une droite.

Si la droite passe par le pôle : Chaque point de la droite a pour image un autre point de celle-ci. L'image d'une droite passant par le pôle est donc la droite elle-même.

Si la droite ne passe pas par le pôle : Appelons cette droite d , A la projection orthogonale du pôle O sur d et A' son inverse. Prenons ensuite un point M quelconque de d . L'inverse de la droite d sera alors le lieu des points M' inverses de M lorsque celui-ci parcourt la droite.

De manière analogue à la démonstration précédente, les triangles $OM'A'$ et OAM sont semblables. Par conséquent, $\widehat{OM'A'} = \widehat{OAM} = 90^\circ$. Le point M' est donc situé sur le cercle de diamètre $[OA']$. On peut en déduire que le lieu des points M' est le cercle en question. L'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle est donc un cercle qui passe par le pôle et dont le centre est sur le perpendiculaire abaissée de O sur la droite.



1.3.4 Image d'un cercle

Si le cercle passe par le pôle On sait déjà que l'inverse d'un cercle qui passe par le pôle est une droite perpendiculaire au diamètre passant par le pôle, puisque l'inversion est un involucre.

Si le cercle ne passe pas par le pôle Mais que se passe-t-il lorsque ce cercle ne passe pas par le pôle ?

Tout d'abord, si p est égal à la puissance de O par rapport au cercle (cfr le point 1.3.2), que nous noterons ρ , l'inverse de chaque point M sera l'autre intersection de OM avec le cercle. Dans ce cas, l'image du cercle est donc le cercle lui-même.

Supposons à présent que $p \neq \rho$. Nous avons démontré précédemment que les inverses d'une même figure selon un même pôle sont homothétiques. Cela nous permet d'affirmer que, comme l'inverse de C est un cercle pour $p = \rho$ et que l'image d'un cercle par une homothétie est toujours un cercle, l'inverse d'un cercle est un autre cercle lorsque $p \neq \rho$.

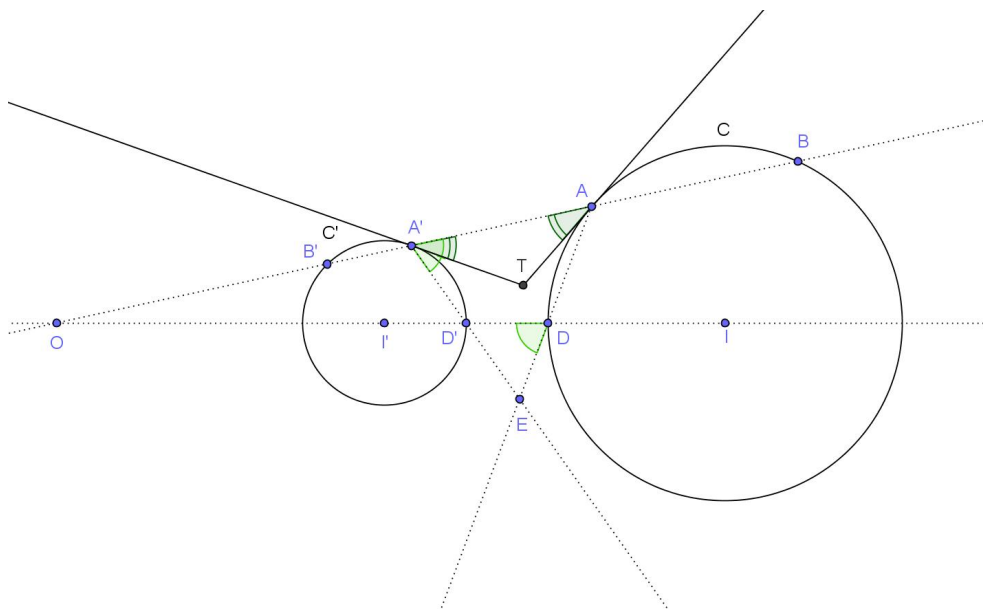
1.3.5 Conservation des angles

Pour finir, une des propriétés les plus importantes de l'inversion est qu'il s'agit d'une transformation conforme. Cela veut dire que l'angle formé par deux lignes (droites ou cercles) en un point de leur intersection est égal à l'angle formé par les inverses de ces deux lignes, au point inverse de cette intersection. Précisons que l'angle formé par une droite et un cercle est l'angle entre cette droite et la tangente au cercle passant par une de leurs intersections.

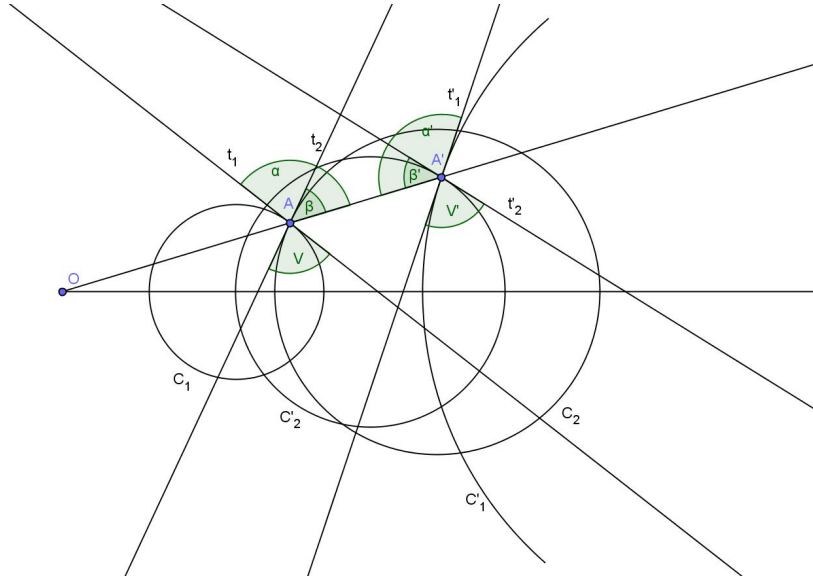


Il s'agit finalement d'une des rares choses que conserve l'inversion. Comme on vient de le voir, celle-ci n'est pas une isométrie ou même une similitude et ne conserve pas l'alignement. On pourrait alors se demander son utilité. Mais l'inversion préserve certains rapports et les angles entre les lignes (droites et cercles). Cette propriété fera de l'inversion un outil très efficace dans la résolution de certains problèmes, comme nous le verrons plus tard (cfr point 2.1).

Avant de démontrer cette propriété, il nous faut d'abord démontrer que les tangentes à deux cercles inverses en des points inverses font des angles égaux, mais de sens contraire, avec le rayon vecteur commun des points de contacts. Soient C et C' deux cercles inverses; A et A' , D et D' deux couples de points inverses par rapport au pôle O et E l'intersection de AD et $A'D'$. Le quadrilatère $A'ADD'$ étant cyclique, les angles $\widehat{D'A'A}$ et $\widehat{D'DE}$ sont tout deux supplémentaires à l'angle $\widehat{D'DA}$ et on en déduit qu'ils sont égaux. Supposons que la sécante $OD'D$ se rapproche indéfiniment de $OA'A$. Les droites AD et $A'D'$ ont pour limites respectives les tangentes AT et $A'T$. Par conséquent, les angles $\widehat{TAA'}$ et $\widehat{TA'A}$ sont égaux.



Prouvons maintenant le théorème énoncé dans le cas où l'on a deux circonférences C_1 et C_2 qui ont respectivement pour inverses C'_1 , C'_2 . Les deux premiers se coupent en A et le point A' est l'inverse de A . Les tangentes t_1 et t'_1 en A et A' aux cercles C_1 et C'_1 font des angles α et α' avec le rayon vecteur OAA' et on sait que ces angles sont égaux mais de sens contraires. De la même façon, les tangentes t_2 et t'_2 aux mêmes points et respectivement à C_2 et C'_2 , font les angles β et β' avec OAA' et $\beta = \beta'$. Or, $V = \beta - \alpha$ et $V' = \beta' - \alpha'$, d'où $V = V'$.



Chapitre 2

Inversion abordée de manière analytique

Nous avons jusqu'à présent abordé l'inversion de manière totalement synthétique mais il est également possible de l'aborder de manière analytique.

2.1 Inversion dans le plan cartésien

2.1.1 Coordonnées de l'image d'un point

Nous allons tout d'abord chercher les coordonnées de l'inverse d'un point donné. Pour cela, plaçons un repère orthonormé dont le centre O sera le pôle d'inversion. On considère ensuite un point $P(x; y)$ quelconque et $P'(x'; y')$, son image par une inversion de pôle O et de puissance k . Comme les points O , P et P' doivent être alignés, on peut transformer les coordonnées de P' en $(tx; ty)$. Pour que P' soit l'image de P par l'inversion, il faut donc que :

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k$$

En terme de distance l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} &= k \\ (x^2 + y^2) \cdot (t^2x^2 + t^2y^2) &= k^2 \\ t^2(x^2 + y^2) &= \frac{k^2}{x^2 + y^2} \\ t &= \frac{k}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Les coordonnées du point P' à partir du point P sont donc $(\frac{kx}{x^2+y^2}; \frac{ky}{x^2+y^2})$

2.1.2 Vérification de certaines propriétés

On peut à présent vérifier certaines propriétés de l'inversion de manière analytique.

L'inversion est-elle involutive ? On a un point $P(x; y)$, son image $P'(\frac{kx}{x^2+y^2}; \frac{ky}{x^2+y^2})$ et on veut prouver que P'' est P . Il suffit pour cela de remplacer x et y par respectivement $\frac{kx}{x^2+y^2}$ et $\frac{ky}{x^2+y^2}$ dans les coordonnées de P' :

$$P''\left(\frac{k \cdot \frac{kx}{x^2+y^2}}{\left(\frac{kx}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2+y^2}\right)^2}; \frac{k \cdot \frac{ky}{x^2+y^2}}{\left(\frac{kx}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2+y^2}\right)^2}\right)$$

$$P''\left(\frac{k^2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{(x^2+y^2)^2}{k^2(x^2+y^2)}; \frac{k^2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{(x^2+y^2)^2}{k^2(x^2+y^2)}\right)$$

$$P''(x; y)$$

L'inversion est donc bien une involution.

Un cercle centré en O reste-t-il invariant par une inversion de puissance égale au carré de son rayon ? Si la puissance vaut k , alors le rayon du cercle vaut \sqrt{k} . On peut alors dire que, pour tous les points P du cercle,

$$x = \sqrt{k} \cos \theta \text{ et } y = \sqrt{k} \sin \theta, \text{ où } \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi$$

et donc

$$x' = \frac{k\sqrt{k} \cos \theta}{(\sqrt{k} \cos \theta)^2 + (\sqrt{k} \sin \theta)^2}, y' = \frac{k\sqrt{k} \sin \theta}{(\sqrt{k} \cos \theta)^2 + (\sqrt{k} \sin \theta)^2}$$

$$x' = \sqrt{k} \cos \theta = x, y' = \sqrt{k} \sin \theta = y$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Une droite ne passant pas par le pôle devient-elle un cercle passant par le pôle ? Considérons une droite $mx + p$ avec $p \neq 0$. Comme l'inversion est une involution, on a $(x; y) = (\frac{kx'}{x'^2+y'^2}; \frac{ky'}{x'^2+y'^2})$. On peut donc écrire

$$0 = mx - y + p$$

$$0 = \frac{mkx'}{x'^2 + y'^2} - \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} + p$$

$$0 = mkx' - ky' + p(x'^2 + y'^2)$$

$$0 = x'^2 + \frac{mkx'}{p} + y'^2 - \frac{ky'}{p}$$

$$0 = \left(x' + \frac{mk}{2p}\right)^2 - \frac{m^2k^2}{4p^2} + \left(y' - \frac{k}{2p}\right)^2 - \frac{k^2}{4p^2}$$

$$\frac{(m^2 + 1)k^2}{4p^2} = \left(x' + \frac{mk}{2p}\right)^2 + \left(y' - \frac{k}{2p}\right)^2$$

ce qui est bien l'équation d'un cercle.

Maintenant il faut encore voir si ce cercle passe bien par le pôle. Pour ce faire, il faut remplacer $(x'; y')$ par $(0; 0)$. On obtient alors $0 = 0$ ce qui prouve que le pôle appartient bien au cercle.

Puisqu'on a prouvé que l'inversion est involutive, on sait aussi qu'un cercle passant par le pôle devient, par inversion, une droite ne passant pas par le pôle.

2.2 Inversion dans le plan complexe

Les expressions que l'on a trouvées au point précédent sont malheureusement assez longues. Elles contiennent souvent des facteurs $x^2 + y^2$ ce qui nous fait penser qu'une approche utilisant les nombres complexes serait peut-être plus judicieuse puisque $x^2 + y^2$ représente le carré du module du nombre complexe $x + iy$.

2.2.1 Coordonnées de l'image d'un point

Nous allons une nouvelle fois considérer une inversion dont le pôle O est le centre du repère (ici, le plan de Gauss). On prend ensuite un point P quelconque correspondant au nombre complexe z . Il est alors intéressant d'écrire les coordonnées de ce point sous une forme polaire car on sait que P' , correspondant au nombre complexe z' , est sur la droite OP . Si la puissance d'inversion k est positive, on a alors $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta}$ où r est la distance de P à O , r' celle de P' à O et θ est l'angle entre l'axe des réels et OP . Si k est négatif, on aura $z' = r'e^{i(\theta+\pi)}$. Nous allons faire tout le raisonnement qui suit en considérant que k est positif, la démonstration pour k négatif étant assez similaire.

La condition $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k$ se transforme donc en $r \cdot r' = k$. On en déduit que

$$\begin{aligned} z' &= \frac{k}{r} \cdot e^{i\theta} \\ &= \frac{k}{r \cdot e^{-i\theta}} \\ &= \frac{k}{\bar{z}} \end{aligned}$$

On voit là que le nom d'"inversion" n'a pas été choisi au hasard puisqu'il est question de l'inverse du conjugué de z .

2.2.2 Vérifications de certaines propriétés

Nous allons vérifier les mêmes propriétés que précédemment, mais nous verrons que les démonstrations seront bien plus courtes à l'aide des nombres complexes.

L'inversion est-elle involutive ? On doit prouver que le point M'' , qui est l'image de M' et qui représente le nombre complexe z'' , n'est autre que le point M . On a

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{k}{\left(\frac{k}{\bar{z}}\right)} \\ &= \frac{k}{\frac{k}{\bar{z}}} \\ &= \bar{z} \\ &= z \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Que devient un cercle centré en O ? L'équation d'un tel cercle est $re^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi]$ (et r est fixé). Son image est donc $\frac{k}{r}.e^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi]$, qui est bien l'équation d'un cercle. En particulier, quand $k = r^2$, le cercle reste invariant.

Une droite ne passant pas par le pôle devient-elle un cercle passant par le pôle ? On peut simplement considérer le cas d'une droite parallèle à l'axe imaginaire puisqu'on peut rendre n'importe quelle droite parallèle à cet axe en faisant tourner le repère. L'équation d'une telle droite est $z = a + it$ où $a, t \in \mathbb{R}$ et où seul t varie. Son image est

$$\begin{aligned} z' &= \frac{k}{a - it} \\ &= \frac{k(a + it)}{a^2 + t^2} \\ &= \frac{ak}{a^2 + t^2} + i \frac{kt}{a^2 + t^2} \end{aligned}$$

Posons $\frac{ak}{a^2+t^2} = x$ et $\frac{kt}{a^2+t^2} = y$. Pour que cela corresponde à un cercle, il est bon de regarder la valeur de $x^2 + y^2$. On a ici

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{a^2k^2 + k^2t^2}{(a^2 + t^2)^2} \\ x^2 + y^2 &= \frac{k^2}{a^2 + t^2} \\ x^2 + y^2 &= \frac{k}{a}x \\ \left(x - \frac{k}{2a}\right)^2 + y^2 &= \frac{k^2}{4a^2} \end{aligned}$$

qui est un cercle de centre $(\frac{k}{2a}; 0)$ et de rayon $|\frac{k}{2a}|$. L'image d'une droite ne passant pas par le pôle est donc un cercle passant par le pôle.

2.3 Inversion dans l'espace

L'inversion dans l'espace, traitée de manière géométrique peut ne pas paraître évidente. En effet la visualisation des transformations y est moins évidente, manier des plans et sphère est moins intuitif.

De manière analytique, par contre, la compréhension et l'étude de l'inversion dans l'espace est quasi immédiate en appliquant le même raisonnement que pour l'inversion dans le plan. Il suffit de rajouter une coordonnée z . En effet, si on considère l'inversion de pôle O , de puissance k , un point $P(x; y; z)$ et son image par inversion $P'(x'; y'; z')$ et tout comme dans le plan, les 3 points doivent être alignés. On peut donc réécrire les coordonnées de P' en $(tx; ty; tz)$. Il y a donc inversion si :

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k$$

Et pour trouver les coordonnées du point P' :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2 + t^2z^2} &= k \\ (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (t^2x^2 + t^2y^2 + t^2z^2) &= k^2 \\ t^2(x^2 + y^2 + z^2) &= \frac{k^2}{x^2 + y^2 + z^2} \\ t &= \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

De là, on peut écrire les coordonnées de P' $(\frac{kx}{x^2+y^2+z^2}; \frac{ky}{x^2+y^2+z^2}; \frac{kz}{x^2+y^2+z^2})$.

On constate donc de manière rapide, grâce à l'analyse, que l'inversion dans l'espace se comporte de la même manière que l'inversion dans le plan à une coordonnée près.

On peut donc en tirer les transformations des figures suivantes. Un plan passant par un pôle reste invariant. Un cercle ne passant pas par le pôle devient un autre cercle ne passant pas lui non plus par le pôle.

Un plan ne passant pas par le pôle devient une sphère passant par le pôle. Et comme l'involution peut être prouvée de la même manière que pour l'inversion dans le plan, une sphère passant par le pôle devient un plan ne passant pas par le pôle.

2.4 Courbes anallagmatiques



Il existe des courbes ou surfaces qui sont globalement invariantes par inversion, comme c'était par exemple le cas pour une droite passant par le pôle. On dit que celles-ci sont anallagmatiques (*an* = sans et *allagma* = changement en grec).

2.4.1 La strophoïde droite

Cette courbe en forme de noeud a été étudiée par Roberval, Barrow, Newton et Bernoulli au 17^e siècle. Son nom vient du grec $\sigma\tau\rho\phi\phi\sigma$ (*strophos*) qui signifie lacet, cordon.

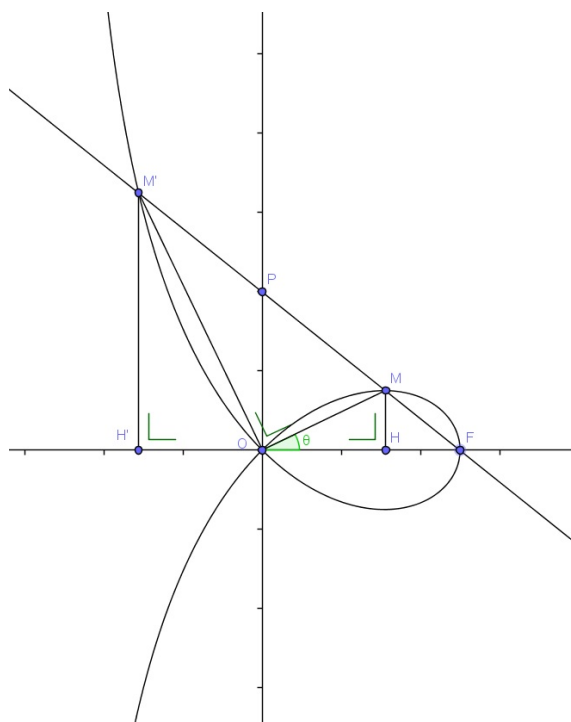
On obtient cette courbe de cette façon : Dans un repère orthonormé, on considère un point fixe $F(a; 0)$ et un point mobile $P(0; p)$. On trace les points M et M' sur la droite FP , de part et d'autre de P , de sorte que

$$|MP| = |M'P| = |OP| = p$$

L'ensemble des points M et M' obtenus en faisant bouger le point P tout le long de l'axe OY constitue la strophoïde droite.



Gilles Personne de Roberval (1602-1675)



A titre indicatif, l'équation polaire de la strophoïde est :

$$r = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$$

Celle-ci peut être démontrée trigonométriquement mais nous n'en avons pas l'intérêt ici.

On souhaiterait prouver que la strophoïde est globalement invariante par une inversion de pôle F de puissance a^2 . Il nous faut donc prouver que

$$\overline{MF} \cdot \overline{M'F} = a^2$$

Tout d'abord, puisque $|OP| < |FP|$, les points M et M' sont bien du même coté de F . Il reste à montrer que

$$|MF| \cdot |M'F| = a^2$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} |MF| &= |PF| - |PM| = |PF| - |OP| \\ |M'F| &= |PF| + |PM'| = |PF| + |OP| \end{aligned}$$

Donc

$$|MF| \cdot |M'F| = (|PF| - |OP|) \cdot (|PF| + |OP|) = |PF|^2 - |OP|^2$$

Par Pythagore dans le triangle rectangle POF , on a donc

$$|MF| \cdot |M'F| = |OF|^2 = a^2$$

2.4.2 Ovals de Cassini

A la fin du 17e siècle, Giovanni Domenico Cassini étudie les courbes décrites par le mouvement des planètes et du soleil. Il arrivera à un modèle qu'il jugera comme adéquat : les ovales de Cassini. Cette courbe que Cassini avait voulu introduire dans l'astronomie, n'est aujourd'hui plus qu'une courbe purement géométrique et de simple curiosité; car on sait que les planètes décrivent des ellipses.

Dans un repère, on place deux foyers $F(a; 0)$ et $F'(-a; 0)$. Une ovale de Cassini est alors l'ensemble des points M tels que

$$\overline{MF} \cdot \overline{MF'} = k^2 \quad (k \text{ étant une constante})$$



Giovanni Domenico Cassini (1625-1712)

Pour plus de facilités, on considérera que $a = 1$. On a donc $\overline{MF}^2 = (1 - x)^2 + y^2$ et $\overline{MF'}^2 = (1 + x)^2 + y^2$

Il faut ensuite résoudre l'égalité :

$$\begin{aligned}
\overline{MF}^2 \cdot \overline{MF'}^2 &= k^4 \\
((1 + x)^2 + y^2) \cdot ((1 - x)^2 + y^2) &= k^4 \\
(1 + x)^2 \cdot (1 - x)^2 + y^2(1 + x)^2 + y^4 + y^2(1 - x)^2 &= k^4 \\
(1 - x^2)^2 + y^2(1 + x^2 + 2x) + y^4 + y^2(1 + x^2 - 2x) &= k^4 \\
1 + x^4 - 2x^2 + y^2 + x^2y^2 + 2xy^2 + y^4 + y^2 + x^2y^2 - 2xy^2 &= k^4 \\
x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 1 - 2x^2 + 2y^2 &= k^4 \\
(x^2 + y^2)^2 + 1 - 2x^2 + 2y^2 &= k^4 \\
(x^2 + y^2)^2 + 1 - 2(x^2 - y^2) &= k^4
\end{aligned}$$

On va ensuite chercher l'équation polaire de cette courbe. Pour cela, on exprime x et y en fonction de l'angle θ avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. En substituant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned}
r^4 + 1 - 2r^2 \cos 2\theta &= k^4 \\
r^4 - 2r^2 \cos 2\theta - k^4 + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Posons $t = r^2$:

$$\begin{aligned}
t^2 - (2 \cos 2\theta)t - k^4 + 1 &= 0 \\
\rho = b^2 - 4ac &= 4 \cos^2(2\theta) - 4(1 - k^4) \\
&= 4(\cos^2(2\theta) + k^4 - 1) \\
&= 4(k^4 - \sin^2(2\theta))
\end{aligned}$$

$$t = \frac{2 \cos 2\theta \pm \sqrt{4(k^4 - \sin^2(2\theta))}}{2}$$

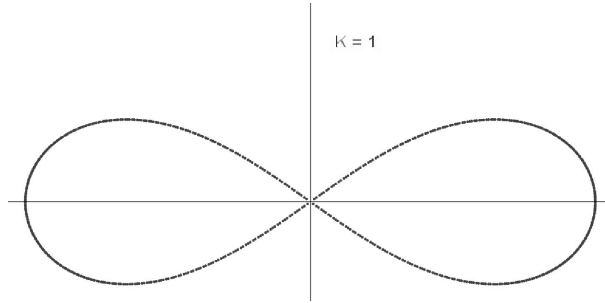
$$r = \pm \sqrt{\cos 2\theta \pm \sqrt{(k^4 - \sin^2(2\theta))}}$$

Comme r est une longueur, le moins est à rejeter. Voici donc l'équation polaire des ovales de Cassini :

$$r = \sqrt{\cos(2\theta) \pm \sqrt{(k^4 - \sin^2(2\theta))}}$$

Il y a donc des conditions d'existence pour cette équation, liées au paramètre k .

• $k = 1$:



Jakob Bernoulli (1654-1705)

Le cas considéré ici est la lemniscate de Bernoulli. Dont l'équation est :

$$r = \sqrt{\cos(2\theta) \pm \sqrt{(1 - \sin^2(2\theta))}}$$

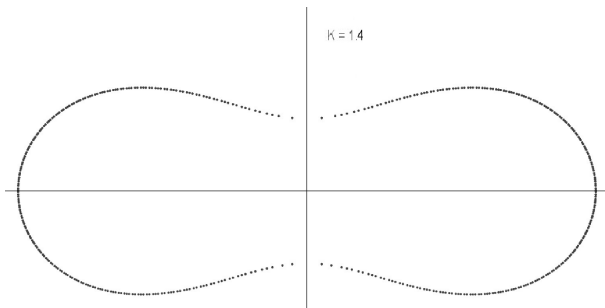
$$r = \sqrt{\cos(2\theta) \pm \cos(2\theta)}$$

$$r = \sqrt{2 \cos(2\theta)}$$

Ou

$$r = 0$$

• $k \geq 1$:



$$k^4 - \sin^2(2\theta)$$

est toujours positif. Or,

$$|\cos(2\theta)| = \sqrt{1 - \sin^2(2\theta)} \leq \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}$$

$$\cos(2\theta) - \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)} \leq 0$$

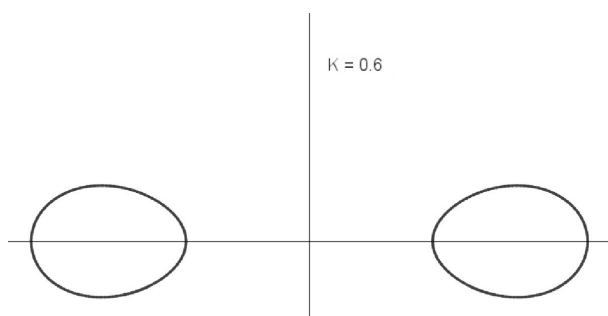
L'équation avec le "-" est donc à rejeter et l'équation avec le "+" toujours vraie.

L'équation des ovals de Cassini pour $k \geq 1$ est :

$$r = \sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}}$$

Il n'y a qu'une seule longueur et donc un seul point pour chaque angle θ .

• $k \leq 1$:



Ici $k^4 - \sin^2(2\theta)$ n'est positif que si :

$$k^4 \geq \sin^2(2\theta)$$

Si $\sin(2\theta)$ est positif : $(\theta \in [0; \frac{\pi}{2}] + n\pi$ (n entier))

$$k^2 \geq \sin(2\theta)$$

$$\theta \in \left[0; \frac{\arcsin(k^2)}{2}\right] \cup \left[\pi - \frac{\arcsin(k^2)}{2}; \pi\right]$$

Si $\sin(2\theta)$ est négatif : ($\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi] + n\pi$ (n entier))

$$-k^2 \leq \sin(2\theta)$$

$$\theta \in \left[-\frac{\arcsin(k^2)}{2}; 0\right] \cup \left[\pi; \pi + \frac{\arcsin(k^2)}{2}\right]$$

De plus :

$$|\cos(2\theta)| = \sqrt{1 - \sin^2(2\theta)} \geq \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}$$

Si $\cos(2\theta)$ est positif : ($\theta \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] + n\pi$ (n entier))

$$\cos 2\theta \geq \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}$$

$$\cos 2\theta - \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)} \geq 0$$

Les équations avec le "+" et avec le "-" sont valables

Si $\cos(2\theta)$ est négatif : ($\theta \in [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}] + n\pi$ (n entier))

$$\cos 2\theta \leq -\sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}$$

$$\cos 2\theta + \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)} \leq 0$$

Les deux équations sont à rejeter.

Donc, pour $k \leq 1$, on a ceci :

Si

$$\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$$

Et que

$$\theta \in \left[0; \frac{\arcsin(k^2)}{2}\right] \cup \left[\pi - \frac{\arcsin(k^2)}{2}; \pi\right]$$

Ou si

$$\theta \in \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$$

Et que

$$\theta \in \left[-\frac{\arcsin(k^2)}{2}; 0\right] \cup \left[\pi; \pi + \frac{\arcsin(k^2)}{2}\right]$$

Alors, on a deux points de la courbe pour chaque angle θ . Sinon, on n'a aucun point.

Invariance par inversion :

Pour qu'un des ovales de Cassini soit invariant par inversion, il faut qu'il y ait deux points alignés dans une même direction. Dès lors, seul le cas où $k \leq 1$ peut être invariant. Ces ovales de Cassini peuvent être invariants par inversion de pôle $O(0; 0)$. Il faut donc prouver que, pour un certain p constant :

$$\sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}} \sqrt{\cos(2\theta) - \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}} = p$$

En élevant au carré :

$$(\cos(2\theta) + \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)})(\cos(2\theta) - \sqrt{k^4 - \sin^2(2\theta)}) = p^2$$

Avec les binômes conjugués on a :

$$\cos^2(2\theta) - (k^4 - \sin^2(2\theta)) = p^2$$

$$\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) - k^4 = p^2$$

$$1 - k^4 = p^2$$

Ce cas des ovales de Cassini est donc invariant par inversion de pôle $O(0; 0)$ et de puissance $\sqrt{1 - k^4}$.

Chapitre 3

Applications

Après avoir découvert l'inversion, une question qui nous vient tout de suite à l'esprit est "A quoi donc l'inversion pourrait-elle servir ?".

3.1 Démonstrations

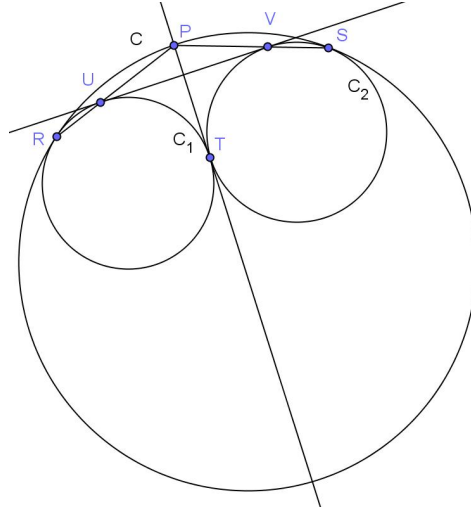
L'inversion est tout d'abord un outil très efficace dans la résolution de certains problèmes. Comme nous l'avons vu au point 1.3.5, cette transformation conserve les angles entre les lignes (droites et cercles). Grâce à cette propriété, on peut parfois transformer un énoncé en un énoncé plus simple. Par exemple, si on doit prouver que deux lignes sont tangentes, on peut, à la place, prouver que leurs inverses le sont.

3.1.1 Problème simple

Voici un premier problème pour illustrer cette application :
On construit les cercles C , C_1 et C_2 tels que C_1 et C_2 soient extérieurement tangents entre eux au point T et intérieurement tangents à C en R et S respectivement. La tangente en T à C_1 et C_2 coupe C en P et PR et PS coupent C_1 et C_2 en U et V respectivement. Montrer que UV est tangente à C_1 et à C_2 .

Il suffit d'utiliser l'inversion de pôle P et de puissance \overline{PT}^2 . De cette façon, C_1 et C_2 restent invariants car \overline{PT}^2 est la puissance de P par rapport à ceux-ci. Le point U devient R et le point V devient S . L'image de la droite UV doit donc être un cercle passant par le pôle, par R et par S , qui n'est autre que le cercle C lui-même. Comme C est bien tangent aux deux cercles, UV l'est aussi.

On voit donc bien ici à quel point l'inversion peut écourter la démonstration de certains problèmes.



3.1.2 Théorème de Ptolémée

Nous allons maintenant démontrer un théorème assez connu : le théorème de Ptolémée.

Théorème *Un quadrilatère est cyclique (inscriptible dans un cercle) si et seulement si la somme des produits des longueurs de 2 côtés opposés est égale au produit des longueurs des diagonales.*

Démonstration

- La condition est nécessaire :

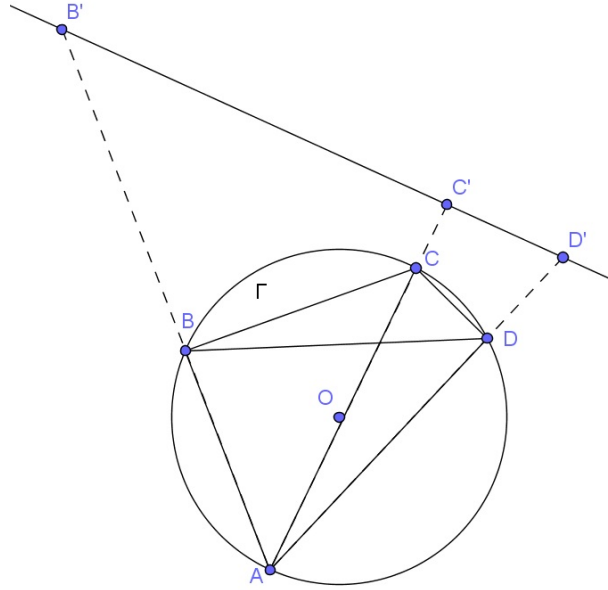
Si les points A, B, C, D sont cocycliques, alors

$$|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| \quad (0)$$

Soit le quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle Γ de centre O . On construit les points B', C', D' qui sont les images des points B, C, D par une inversion de pôle A et de puissance 1.



Claude Ptolémée (90-168)



L'image d'un cercle passant par le pôle est une droite qui ne passe pas par ce pôle. Les points B' , C' , D' sont donc alignés et

$$|C'D'| + |B'C'| = |B'D'| \quad (1)$$

Ensuite, on sait que

$$|C'D'| = |CD| \cdot \frac{1}{|AD| \cdot |AC|}, |B'C'| = |BC| \cdot \frac{1}{|AB| \cdot |AC|}, |B'D'| = |BD| \cdot \frac{1}{|AB| \cdot |AD|} \quad (2)$$

En substituant (2) dans (1), on obtient

$$\frac{|CD|}{|AD| \cdot |AC|} + \frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|}$$

Puis, en multipliant par $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$, on obtient

$$|CD| \cdot |AB| + |BC| \cdot |AD| = |BD| \cdot |AC|$$

On retrouve bien (0).

- La condition est suffisante :

Si $|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD|$, alors les points A, B, C, D sont cocycliques.

En considérant le même quadrilatère et la même inversion, grâce à (2), on sait que

$$|BC| = |B'C'| \cdot |AB| \cdot |AC|, |CD| = |C'D'| \cdot |AD| \cdot |AC|, |BD| = |B'D'| \cdot |AB| \cdot |AD|$$

En remplaçant dans l'équation initiale, on obtient

$$|AD| \cdot |B'C'| \cdot |AB| \cdot |AC| + |AB| \cdot |C'D'| \cdot |AD| \cdot |AC| = |AC| \cdot |B'D'| \cdot |AB| \cdot |AD|$$

$$\Leftrightarrow |B'C'| + |C'D'| = |B'D'|$$

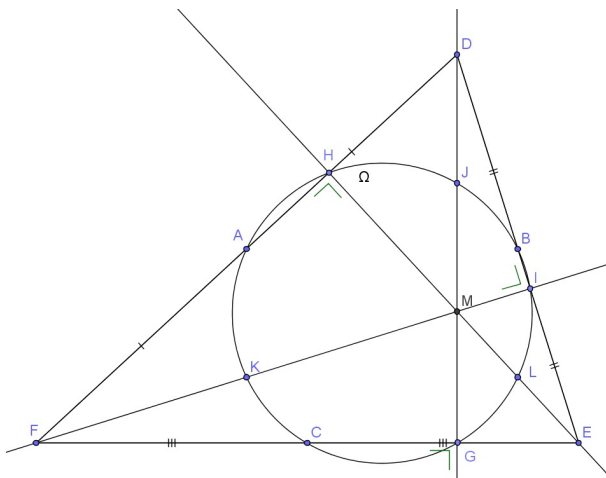
Les points B' , C' et D' sont donc alignés. Vu que l'image d'une droite ne passant pas par le pôle est une circonférence qui passe par le pôle, le quadrilatère $ABCD$ est cyclique.

Nous avons donc bien démontré ce théorème.

3.1.3 Feuerbach, le film



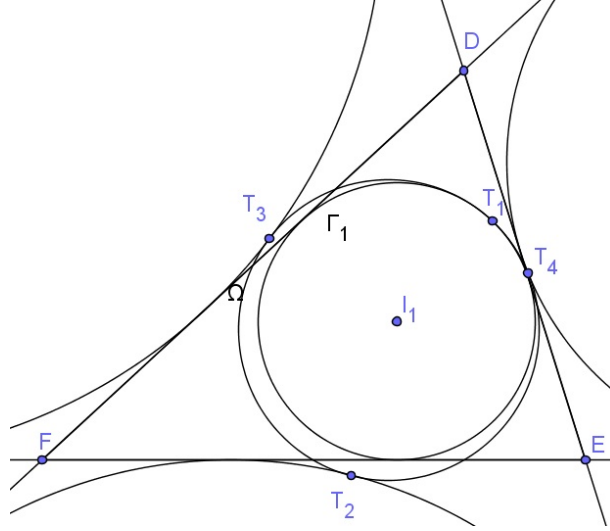
Tout d'abord, définissons le cercle d'Euler d'un triangle. Le cercle d'Euler est un cercle très particulier car il passe par 9 points remarquables du triangle : les milieux des cotés, les pieds des hauteurs et le milieu des segments reliant l'orthocentre aux sommets du triangle.



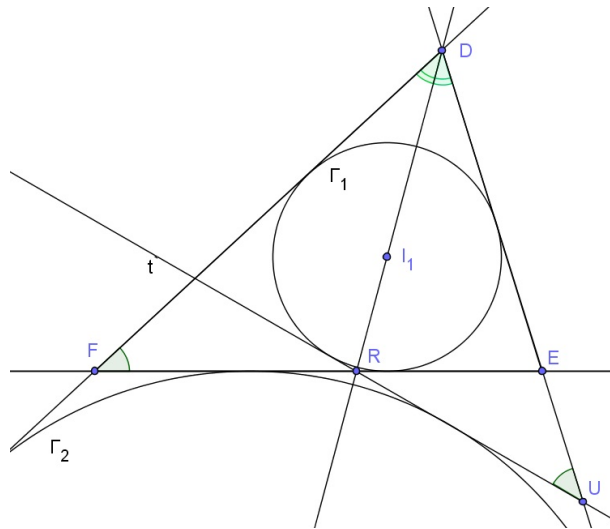
Nous allons maintenant démontrer le théorème de Feuerbach. Ce théorème, qui doit son nom au mathématicien allemand Karl Feuerbach, est un théorème surprenant. En effet, il démontre que, dans un triangle quelconque, le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits de celui-ci. Les points d'intersections entre le cercle d'Euler et les cercles inscrit et exinscrits sont appelés points de Feuerbach (T_1, T_2, T_3, T_4).



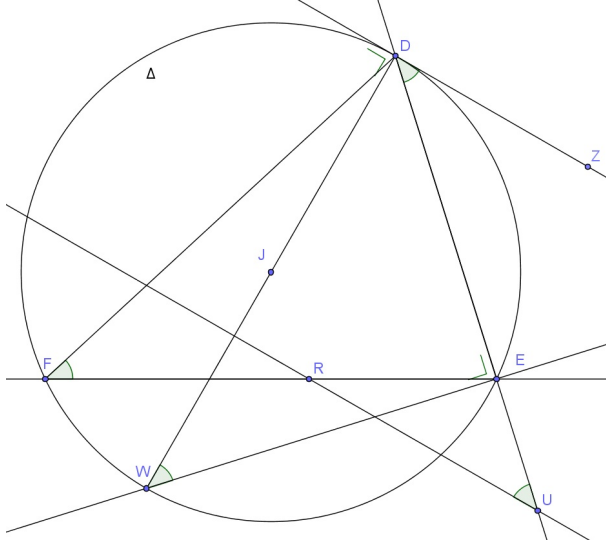
Karl Wilhelm Feuerbach
(1800-1834)



Considérons un triangle DEF , son cercle inscrit Γ_1 de centre I_1 et le cercle exinscrit Γ_2 de centre I_2 , tangent à $[FE]$. Le côté $[FE]$ est donc tangent aux deux cercles. Traçons ensuite la bissectrice de \widehat{FDE} . Celle-ci passe par I_1 et I_2 et coupe le côté $[FE]$ en R . Traçons la droite t symétrique de la droite FE par rapport à la bissectrice DI_2 . Posons U , intersection de la droite DE avec t . On peut affirmer que les triangles FDR et RDU sont isométriques car $\widehat{FDR} = \widehat{RDU}$, $[DR]$ est commun et $|FD| = |DU|$ puisque les deux droites sont symétriques par rapport à la bissectrice DI_2 . Donc, $\widehat{DFR} = \widehat{DUR}$.



Considérons ensuite la droite j , tangente au cercle circonscrit du triangle noté Δ , en D et construisons le point W , diamétralement opposé à D . On a alors $\widehat{DFE} = \widehat{DWE} = \widehat{ZDE}$ car des angles inscrits et tangentiels interceptant un même arc ont même amplitude. Puisque $\widehat{DFR} = \widehat{DUR}$, $\widehat{ZDE} = \widehat{DUR}$. La droite j est donc parallèle à t (*angles alternes internes*).



FI_1 étant la bissectrice intérieure et FI_2 la bissectrice extérieure de l'angle \widehat{DFE} , on a le rapport :

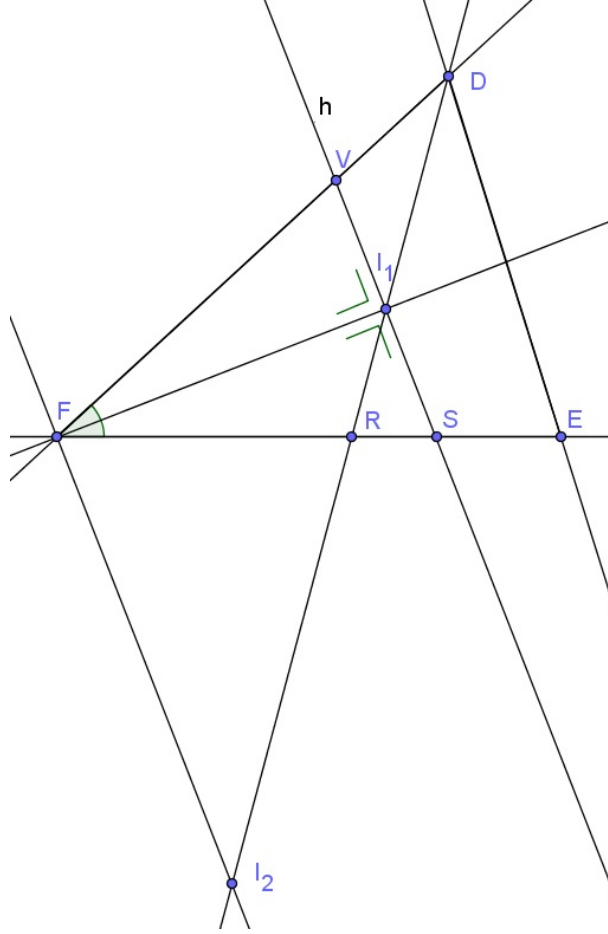
$$\frac{|RI_1|}{|I_2R|} = \frac{|I_1D|}{|I_2D|} \quad (1)$$

Pour démontrer ce rapport, traçons la droite h passant par I_1 et parallèle à FI_2 . Elle coupe FE en S et FD en V . Par Thalès on sait que :

$$\frac{|RI_1|}{|I_2R|} = \frac{|I_1S|}{|FI_2|}$$

$$\frac{|I_1D|}{|I_2D|} = \frac{|VI_1|}{|FI_2|}$$

Pour que (1) soit juste, il faut que $|VI_1| = |I_1S|$. Or $\widehat{FI_1S}$ est un angle droit et est égal à $\widehat{FI_1V}$, $\widehat{VFI_1} = \widehat{SFI_1}$ et $[FI_1]$ est le coté avec ces deux angles adjacents et est commun aux deux triangles FVI_1 et FI_1S . Ces deux triangles sont donc isométriques et $|VI_1| = |I_1S|$. Le rapport est donc correct.



On projette ensuite DI_2 perpendiculairement sur la droite FE . L est donc la projection de I_2 sur la droite FE , P celui de I_1 et Q celui de D . Vu que FE est tangent aux deux cercles, L et P , issus de la projection, sont les points de tangence de ce côté avec ces cercles. Le rapport de Thalès (1) devient :

$$\frac{|RP|}{|LR|} = \frac{|PQ|}{|LQ|} \quad (2)$$

Posons M milieu de $[FE]$. M est également milieu de \overline{LP} . Pour démontrer ceci, posons $2p =$ périmètre, T, S, P , les points de tangence du cercle inscrit Γ_1 avec les cotés du triangle et U, L, V , les points de tangence du cercle exinscrit Γ_2 avec les prolongements des cotés. On a alors :

$$|DT| + |TF| + |FP| + |PE| + |ES| + |SD| = 2p$$

Comme $|DT| = |SD|$, $|TF| = |FP|$, on peut réécrire l'équation de la sorte :

$$2|TF| + 2|DT| + 2|PE| = 2p$$

$$|PE| = p - |TF| - |DT| = p - |FD|$$

D'autre part, on sait que $|FL| = |FU|$ et $|EL| = |EV|$ (par triangles isométriques : 3 angles égaux et un coté de même longueur). On peut donc dire que :

$$|DU| + |DV| = 2p$$

Et vu que $|DU| = |DV|$, on a $|DU| = p$ et

$$|FL| = |FU| = p - |FD|$$

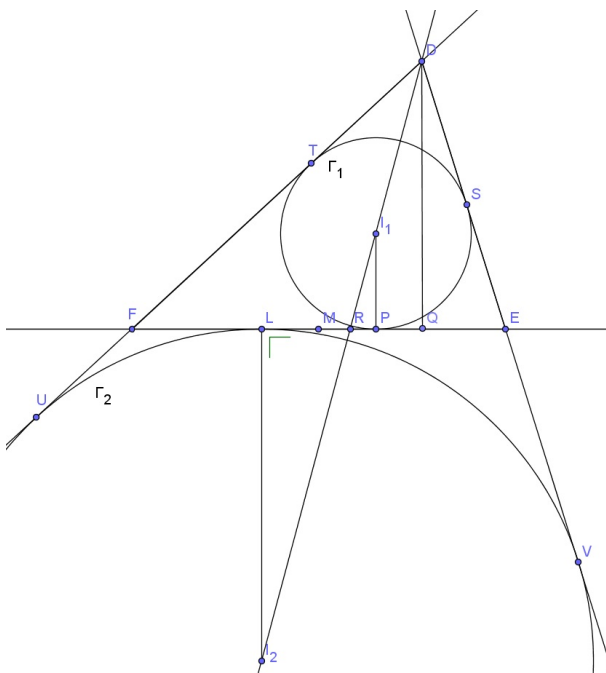
$|FL|$ est donc égal à $|EP|$ et M est bien le milieu de $[LP]$. On peut donc transformer l'égalité (2) de la sorte, en utilisant $|MP| = |ML|$:

$$\frac{|RP|}{|LR|} = \frac{|PQ|}{|LQ|}$$

$$\frac{|MP| - |MR|}{|LM| + |MR|} = \frac{|MQ| - |MP|}{|LM| + |MQ|}$$

$$(|MP| - |MR|)(|MP| + |MQ|) = (|MQ| - |MP|)(|MP| + |MR|)$$

$$|MQ| \cdot |MR| = |MP|^2$$

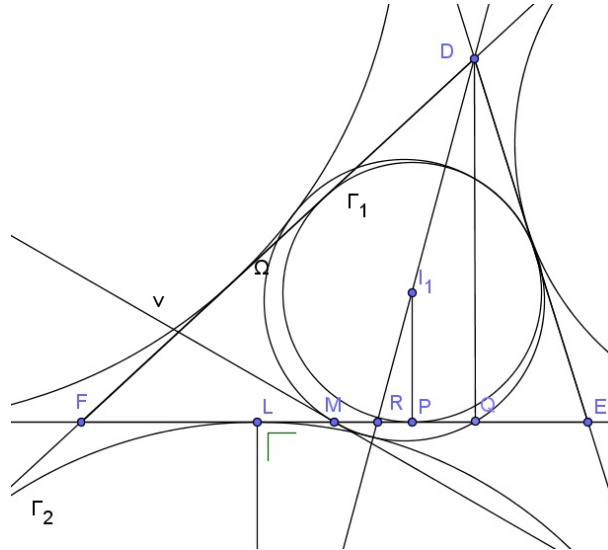


Traçons la droite v parallèle à t passant par M . Ensuite, considérons l'inversion de centre M et de rapport :

$$|ML|^2 = |MP|^2 = |MR| \cdot |MQ|$$

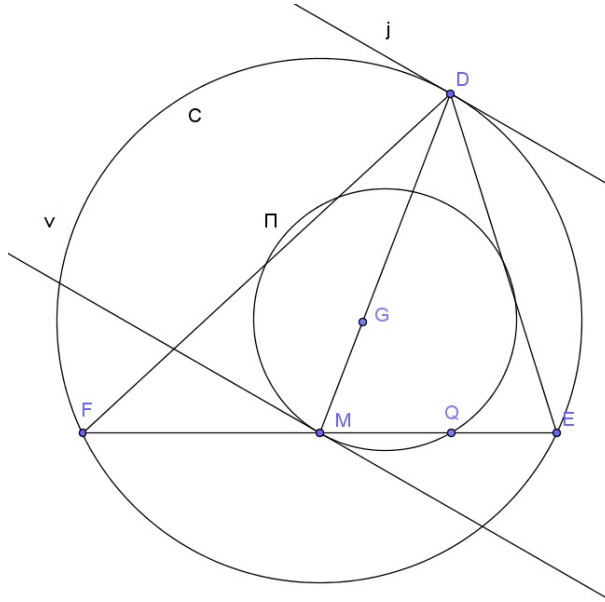
Par cette inversion, les cercles Γ_1 et Γ_2 restent invariants et la droite t devient un cercle (*cfr 1.3.3*) Ω passant par M (pôle d'inversion), Q (vu que t passe par R et que

$\frac{|ML|^2}{|MR|} = |MQ|$ et t étant tangente à Γ_1 et Γ_2 , le cercle né de l'inversion le reste. De plus, la droite v passant par le pôle M reste invariante par inversion (*cfr 1.3.3*). Comme elle était initialement parallèle à t , la conservation des angles nous indique qu'elle est tangente à Ω en M .



Considérons maintenant le cercle d'Euler Π du triangle DEF . Celui-ci passe par M et Q (*par définition de ce cercle*). Nous allons montrer que les cercles Π et Ω sont en fait confondus.

Plaçons G aux deux tiers de $[DM]$, ce point est donc le centre de gravité du triangle FDE (aux deux tiers de la médiane). En faisant une homothétie de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$, les sommets du triangle deviennent les milieux des cotés opposés, donc en particulier, D devient M . Cette homothétie envoie donc le cercle circonscrit au triangle sur le cercle d'Euler (car celui-ci passe par les milieux des cotés du triangle). L'homothétie conservant les angles et donc les parallélismes, la tangente au cercle d'Euler en M est parallèle à j .



Ainsi, les deux cercles Π et Ω passent par M et Q et ont tous deux une tangente en M parallèle à j . Il s'agit donc bien des mêmes cercles. Puisqu'on a montré que Ω est tangent à Γ_1 et Γ_2 , la démonstration est terminée.

En fait, le cercle d'Euler étant le même pour le triangle initial que pour les trois triangles ayant pour sommets l'orthocentre et deux sommets du triangle initial (les hauteurs sont les mêmes, les pieds de celle-ci le sont donc aussi, or le cercle d'Euler passe par les trois pieds des hauteurs), il est tangent également à leurs cercles inscrit et exinscrits. Ce qui fait un total de 16 cercles. Le cercle d'Euler est donc tangent à 16 cercles.

3.2 Projection stéréographique

L'homme a toujours voulu représenter la surface de la Terre sur un plan, pour en faire une carte que l'on peut facilement insérer dans un atlas par exemple. Seulement, passer ainsi de la $3D$ à la $2D$, n'est pas facile. L'idéal serait que la carte soit isométrique, c'est-à-dire qu'on puisse connaître la distance entre deux points de la Terre en mesurant la distance entre leurs représentations sur la carte. Malheureusement, des telles cartes n'existent pas et il faut faire des compromis en se concentrant sur certains aspects. Certaines cartes représentent, par exemple, fidèlement les superficies. On peut également créer une carte qui respecte les angles. Cela veut dire que si on prend deux courbes sur la sphère qui se coupent en un point avec un certain angle, les projections des courbes se couperont avec le même angle. Cette carte est donc fort pratique pour un navigateur qui mesure le cap de sa route et qui aimerait que les angles qu'il mesure se retrouvent exactement sur sa carte. La manière d'obtenir

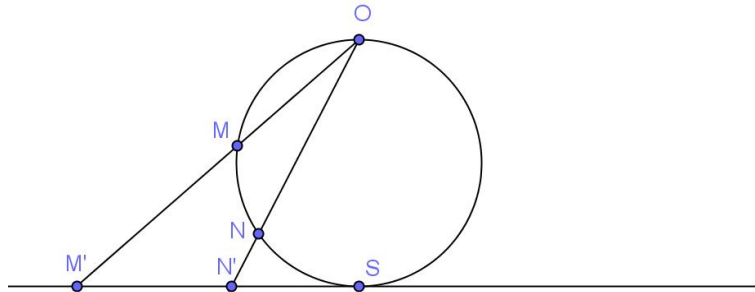


Hipparque de Nicée
(-190-120)

une telle carte s'appelle la *projection stéréographique*. On ne sait pas avec certitude qui a inventé cette projection. Certains parlent d'Hipparque de Nicée (vers -150), d'autres de Ptolémée (deux siècles plus tard) et d'autres affirment qu'Hipparque a bien inventé cette projection mais qu'il n'en connaissait pas les propriétés.

3.2.1 Comment faire une projection stéréographique ?

On doit d'abord considérer que la Terre est une sphère parfaite. La projection stéréographique consiste alors à projeter chaque point de la sphère sur un plan horizontal. Concrètement, on choisit d'abord un point quelconque O sur la sphère. L'image M' d'un point M est ensuite l'intersection de la droite OM avec le plan horizontal tangent à la sphère au point diamétralement opposé à O (le pôle Sud, si O est le pôle Nord).



Les parallèles seront donc projetées en des cercles concentriques et les méridiens en droites se croisant au centre des cercles. On remarque aussi que, au plus le point M est près du pôle, au plus son image sera projetée loin et réciproquement. Tout ceci nous fait penser qu'une inversion pourrait se cacher derrière la projection stéréographique.

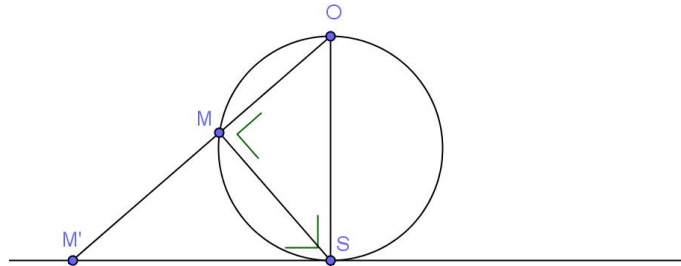


Remarquons que le triangle OSM' est rectangle en S et que le triangle OMS est rectangle en M parce qu'il est inscrit dans un cercle en ayant un diamètre pour côté. Le segment $[MS]$ est par conséquent la hauteur relative à l'hypoténuse du premier triangle.

Or on sait que, dans un triangle rectangle, le carré de la longueur d'un côté de l'angle droit vaut le produit des longueurs de l'hypoténuse et de la projection orthogonale de celle-ci. Ici, on a donc

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = 4r^2$$

où r est le rayon de la sphère. On fait donc une inversion de pôle O , de puissance $4r^2$.



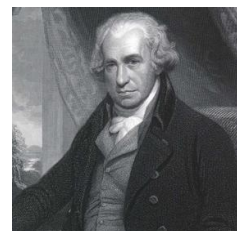
Voici, ci-dessous, la projection de la Terre si l'on prend le point de l'équateur situé à l'extrémité ouest de l'Afrique comme pôle. Dans ce cas-ci, la projection des méridiens et des parallèles ne donne plus des cercles concentriques et des droites. A la place, on observe deux faisceaux de cercles qui se rejoignent aux pôles Nord et Sud.



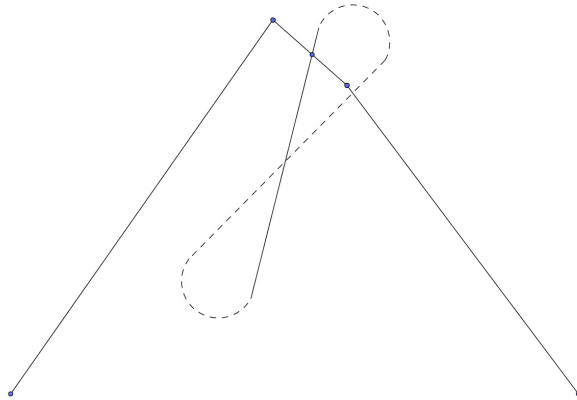
3.3 Inverseurs

3.3.1 Inverseur de Peaucellier

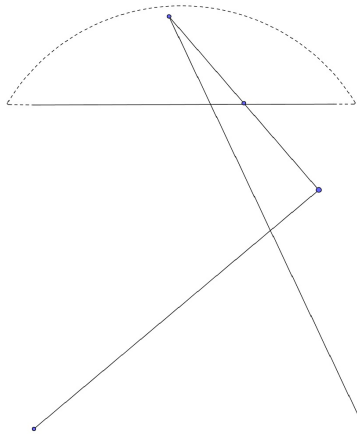
On a longtemps cherché un système de transmission mécanique permettant de transformer un mouvement rectiligne en un mouvement circulaire. James Watt propose un premier modèle qui permet de créer un mouvement plus ou moins rectiligne suivant l'axe de la machine. Mais ce système engendre trop de frottements, et donc une usure trop rapide des pièces.



James Watt (1736-1819)

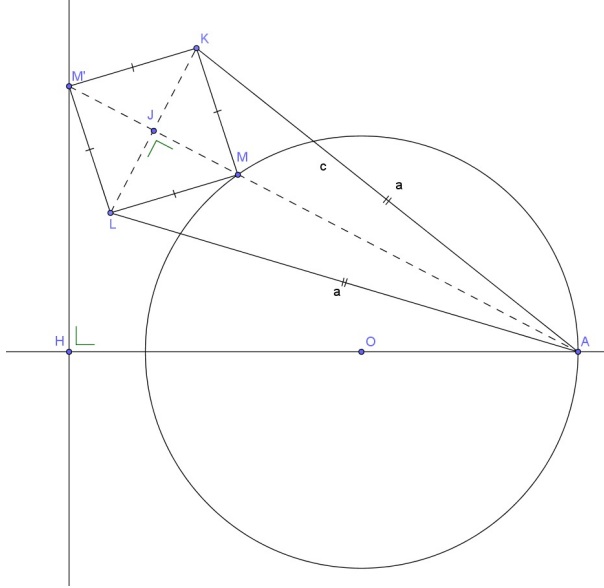


Pafnouti Tchebychev (1821-1894) conçoit ensuite un mécanisme appelé "cheval de Tchebychev" qui permet de créer un mouvement plus rectiligne que celui de Watt.



Finalement, Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913) parvient à créer un mouvement parfaitement rectiligne à l'aide de son inverseur. Cette transmission est notamment utilisée dans les machines à vapeur.

Comme son nom l'indique, ce mécanisme réalise concrètement une inversion géométrique. Celui-ci est composé d'un losange relié par 2 de ses sommets opposés à un point fixe A tel que $\overline{AO} = \overline{OM}$ (AK et AL ont la même longueur constante a). Le losange coulisse : les angles changent mais les longueurs sont conservées (longueur des côtés = la constante b). Ainsi, comme on peut l'observer sur le schéma, en faisant bouger le point M sur un arc de cercle limité de centre O (le mouvement circulaire) le losange se déforme et la trajectoire du point M' dessine une droite perpendiculaire à \overline{AO} . Nous pouvons prouver assez facilement la présence d'une inversion :



Les diagonales du losange $KMLM'$ sont perpendiculaires et ont le même milieu J (propriété connue du losange). On peut donc affirmer que

$$|AM| \cdot |AM'| = (|AJ| - |JM|) \cdot (|AJ| + |JM'|)$$

Or $|JM| = |JM'|$ (propriété connue du losange).

$$\Rightarrow |AM| \cdot |AM'| = (|AJ| - |JM|) \cdot (|AJ| + |JM|) = |AJ|^2 - |JM|^2$$

On remarque aussi les deux triangles rectangles LJA et LJM rectangles en J : par Pythagore,

$$|AJ|^2 = a^2 - |JL|^2$$

$$|JL|^2 = b^2 - |JM|^2$$

Ainsi

$$|AJ|^2 - |JM|^2 = a^2 - b^2$$

$$\text{Ou } |AM| \cdot |AM'| = a^2 - b^2$$

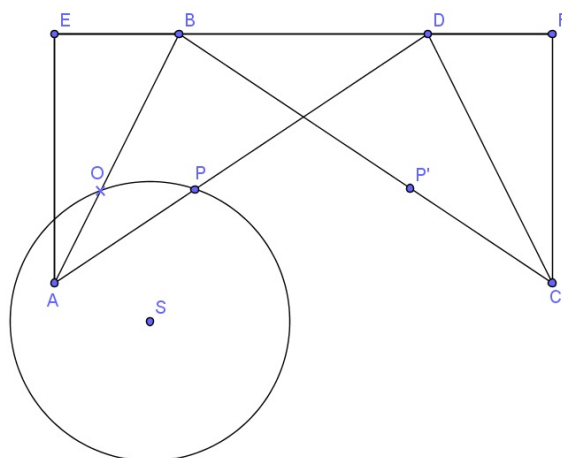
où $a^2 - b^2$ est une constante.

Cqfd : M' est l'image de M par inversion de pôle A et de puissance $a^2 - b^2$. On se rend compte ici que grâce à ce mécanisme, nous pouvons créer une droite parfaite sans outils préalables. Les côtés du losange doivent être de longueurs égales mais ils ne doivent pas être rectilignes. De même pour $|AK|$ et $|AL|$, nous pouvons prendre des simples cordes, pour autant qu'elles soient de longueurs égales. Enfin il faut une dernière corde OM , pour que M dessine un arc de cercle parfait. L'inverseur de Peaucellier permet de créer des droites à partir de rien grâce aux phénomènes de l'inversion ! Étonnant non ?

3.3.2 Inverseur de Hart

Après avoir vu l'inverseur de Peaucellier, nous allons découvrir ici un autre système permettant de transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne : l'inverseur de Hart.

Essayons tout de suite de comprendre le mécanisme de cet inverseur.



Sur ce schéma, les points E et F ainsi que les segments $[AE]$, $[EB]$, $[DF]$ et $[FC]$ sont fictifs : ils n'apparaissent pas dans le mécanisme réel. Le mécanisme est composé des points A , B , C , D , O et des points P et P' qui tracent les mouvements. Le point O est le seul à être fixe. Ceux-ci sont reliés par 4 segments, $[AB]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[DC]$ de telle manière que $|AB| = |DC|$ et que $|AD| = |BC|$. Ainsi le triangle ABD est isométrique au triangle CDB et donc $ABDC$ est un trapèze isocèle (BD parallèle à AC).

Les points O , P et P' sont situés respectivement sur $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$ de telle manière qu'ils satisfassent la relation :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CP'}}{\overline{CB}} = b \text{ (constante)}$$

(b doit être compris entre 0 et 1).

De la relation ci-dessus on déduit que :

- OP est parallèle à BD . (AOP et ABD triangles semblables)
- O , P et P' sont colinéaires et la droite qu'ils forment est parallèle à AC et BD .

Enfin nous traçons le point S tel qu'il soit le centre d'un cercle passant par O et P . Lorsque P coulissera sur ce cercle (mouvement circulaire), P' tracera une droite (mouvement rectiligne).

Montrons que P' est l'image de P par une inversion de centre O et de rapport

$$b(1 - b)(|AD|^2 - |AB|^2)$$

C'est ici qu'interviennent ces fameux points fictifs E et F . Il sont tracés de telle manière que AE et CF soient perpendiculaires à AC . Le rectangle $A E F C$ est alors formé : $|EF| = |AC|$.

On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} |AC|.|BD| &= |EF|.|BD| \\ |AC|.|BD| &= (|ED| + |EB|)(|ED| - |EB|) \\ |AC|.|BD| &= |ED|^2 - |EB|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite le théorème de Pythagore dans les triangles EAD et EAB rectangles en E :

$$\begin{aligned} |ED|^2 + |AE|^2 &= |AD|^2 \quad (2) \\ |EB|^2 + |AE|^2 &= |AB|^2 \quad (2') \end{aligned}$$

En combinant (1), (2) et (2'), on obtient :

$$|AC|.|BD| = |AD|^2 - |AB|^2$$

De plus on sait que AOP et ABD sont des triangles semblables donc :

$$\frac{|OP|}{|BD|} = \frac{|AO|}{|AB|} = \frac{|AP|}{|AD|}$$

Or

$$\frac{|AO|}{|AB|} = b$$

$$\frac{|OP|}{|BD|} = \frac{|AO|}{|AB|} = b \quad (3)$$

$$\frac{|OP'|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|AB|} = \frac{|AB - AO|}{|AB|} = 1 - b \quad (4)$$

En combinant (3) et (4) :

$$\begin{aligned} |OP|.|OP'| &= b(1 - b)(|AC|.|BD|) \\ |OP|.|OP'| &= b(1 - b)(|AD|^2 - |AB|^2) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

P' est bel et bien l'image de P par une inversion de centre O et de rapport $b(1 - b)(|AD|^2 - |AB|^2)$.

Troisième partie

Conclusion

Chapitre 4

Avez-vous résolu l'énigme des lions d'Afrique ?

Comme vous l'avez sûrement deviné maintenant, il suffit d'utiliser l'inversion ! Une inversion dont le pôle est le centre de la cage et dont la puissance est le carré du rayon de celle-ci permettra d'enfermer tous les lions d'Afrique dans la cage. On vous conseille de vous mettre dans la cage (mais pas au centre, sinon vous vous retrouverez projetés en l'infini...) pour vous retrouver ensuite à l'extérieur, à l'abri de ces féroces carnivores.

Chapitre 5

Bref récapitulatif

En bref, l'image de M par une inversion de pôle O et de puissance p est la transformation du plan qui envoie M sur M' de sorte que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p$, en orienté. On peut donc dire que l'inversion rapproche ce qui est éloigné et éloigne ce qui est proche. Elle est également involutive car l'image de M' est M .

En ce qui concerne les images de formes particulières :

- Deux points et leurs images sont situés sur un même cercle.
- L'image d'une droite est la même droite si O appartient à celle-ci, sinon, il s'agit d'un cercle passant par O .
- L'image d'un cercle est une droite si O appartient au cercle, sinon, il s'agit d'un cercle.

Ensuite, l'inversion ne conserve pas l'alignement mais elle conserve l'angle entre les courbes et cela fait de l'inversion un outil très pratique dans la résolution de certains problèmes géométriques et en cartographie. En effet, on retrouve l'inversion derrière la projection stéréographique, qui permet de projeter la Terre sur une carte où les angles seront respectés, ce qui est très utile en navigation.

Après avoir traité l'inversion de manière synthétique, on l'a traitée de manière analytique. On a vu que toutes les propriétés démontrées précédemment étaient encore vraies et soulignons, par ailleurs, qu'effectuer l'analyse dans le plan complexe permet de fortement simplifier les calculs.

Notons qu'il existe certaines courbes anallagmatiques, c'est-à-dire invariantes par inversion. Parmi elles, on compte le cercle, la strophoïde droite et certains ovales de Cassini.

Enfin, l'inversion a une troisième application en mécanique. Elle permet, en effet, de créer un système de transmission mécanique afin de passer d'un mouvement circulaire à un mouvement parfaitement rectiligne.

Bibliographie

- DALLE A., DE WAELE C., *Géométrie plane*, DeBoeck-Wesmael, Bruxelles, 1986.
- DODGE C., *Euclidean Geometry and Transformations*, Addison-Wesley, 1972.
- EIDEN J.-D., *Géométrie analytique classique*, Calvage & Mounet, Paris, 2009.
- PAPELIER G., *Exercices de géométrie moderne, Tome VI : Inversion*, Vuibert, Paris, 1956.
- LEYS J., GHYS E., ALVAREZ A., *Dimensions... une promenade mathématique*, DVD, Lyon, 2008.
- SAGE M., *Inversions, complexes et applications*, <http://www.normalesup.org/sage/Cours/InvComp.pdf> , mis en ligne le 07/10/05, consulté le 08/01/11.
- MEHL S., *ChronoMath, une chronologie des mathématiques*, <http://serge.mehl.free.fr/>, date de mise en ligne non citée, consulté le 08/01/11.
- BLANCHARD J.-L., *L'inverseur de Peaucellier*, http://jeanlouis.blanchard.pagesperso-orange.fr/french_pdf/inverseur_de_peaucellier_pub.pdf, mis en ligne en 2006, consulté le 08/01/11.
- Non cité, *L'inversion complexe*, <http://homeomath.ilingo.net/inversion1.htm>, date de mise en ligne non citée, consulté le 08/01/11.