Éléments de géométrie

Arnaud Bodin, avril 2012

L'inversion

1 Cercle-droite

1.1 Équation complexe d'une droite

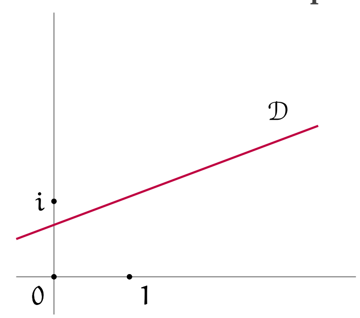
Soit

$$ax + by = c$$

l'équation réelle d'une droite $\mathcal{D}$: a, b, c sont des nombres réels (a et b n'étant pas nuls en même temps) d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Écrivons $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

donc $\mathcal{D}$ a aussi pour équation $a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) = 2c$ ou encore $(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} = 2c$.
Posons $\omega = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$ alors nous obtenons

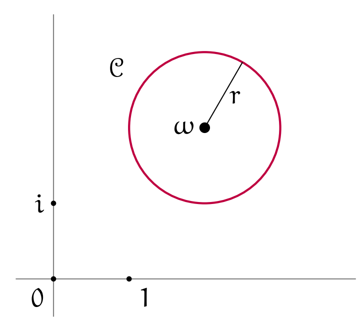


l'***équation complexe*** d'une droite est :

$$\bar{\omega} z + \omega \bar{z} = k$$

où $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

1.2 Équation complexe d'un cercle



Soit $\mathcal{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r. C'est l'ensemble des points M tel que $d(\Omega, M) = r$. Si l'on note ω l'affixe de Ω et z l'affixe de M. Nous obtenons :

$$d(\Omega, M) = r \iff |z - \omega| = r \iff |z - \omega|^2 = r^2 \iff (z - \omega)\overline{(z - \omega)} = r^2$$

en développant nous trouvons que

l'***équation complexe*** du cercle centré en $\Omega(\omega)$ et de rayon r est :

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$.

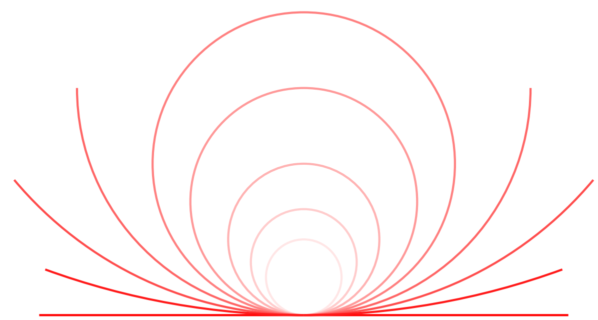
1.3 Les cercles-droites

Les deux paragraphes précédents conduisent à la définition suivante.

Proposition 1. Un ***cercle-droite*** est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que

$$az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k$$

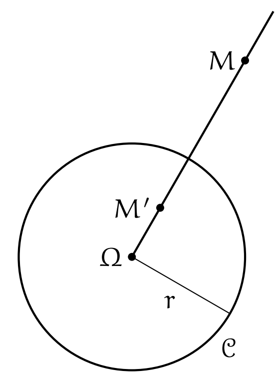
où $a, k \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$ sont donnés.
- Si $a = 0$ un cercle-droite est une droite.
- Si $a \neq 0$ un cercle-droite est un cercle.



Exemple 1. Le cercle $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}(\Omega(0, r), r)$ a pour équation $z\bar{z} - \bar{\omega}_r z - \omega_r\bar{z} = r^2 - |\omega_r|^2$ avec $\omega_r = 0 + ir$. Cette équation s'écrit aussi $z\bar{z} + irz - ir\bar{z} = 0$ ou encore $z - \bar{z} + \frac{z\bar{z}}{ir} = 0$. On fait tendre r vers l'infini : le rayon tend vers l'infini et le centre s'éloigne indéfiniment. À la limite l'équation devient $z - \bar{z} = 0$, qui est l'équation d'une droite et plus précisemment de l'axe des abscisses. Une droite peut-être vu comme un cercle dont le centre est à l'infini.

2 L'inversion

2.1 Définition géométrique

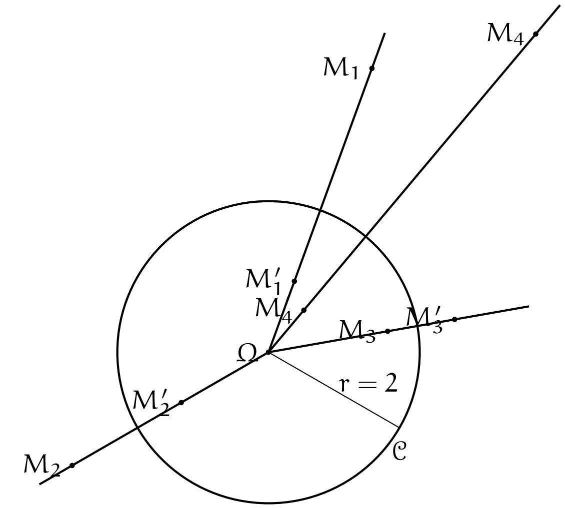


Soit le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, r)$. L'***inversion*** est l'application du plan privé de Ω dans lui-même qui à un point M associe un point M' tel que :
- $M' \in [\Omega M)$,
- $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$.

La première condition impose que M' est sur la demi-droite issue de Ω passant par M, la deuxième condition lie les distances de M et M' à Ω.
Le point Ω est le ***centre*** de l'inversion, le nombre r^2 est sa ***puissance***, $\mathcal{C}(\Omega, r)$ est le ***cercle d'inversion***.
Voici quelques propiétés élémentaires :

Proposition 2. Soit $\iota : \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \to \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ une inversion de centre Ω et de puissance r^2.

1. Chaque point du cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ est invariant par ι : $M \in \mathcal{C}(\Omega, r) \implies \iota(M) = M$.
2. L'inversion ι est une bijection. C'est même une involution : pour tout point $M \in \mathcal{P}\backslash\{\Omega\}$, $\iota(\iota(M)) = M$.



Le fait que $M \mapsto \iota(M)$ soit une involution se formule aussi ainsi : si $M' = \iota(M)$ alors $M = \iota(M')$.

Exemple 2. Soit ι l'inverion de centre l'origine et de puissance $r^2 = 4$. Nous représentons des points M_i ainsi que leur image $M_i' = \iota(M_i)$. Comme l'inversion est involutive, nous avons aussi $M_i = \iota(M_i')$. Il est important de noter que l'inversion ne préservent *pas* les longueurs. Par exemple, comparez les distance M_1M_4 et $M_1'M_4'$. Voir l'exercice 4 pour une formule.

Démonstration. 1. Soit $M \in \mathcal{C}(\Omega, r)$ et notons $M' = \iota(M)$. La relation entre les distances s'écrit $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$. Mais comme $\Omega M = r$ alors nous avons aussi $\Omega M' = r$. Comme M et M' sont sur la même demi-droite issue de Ω alors $M = M'$.

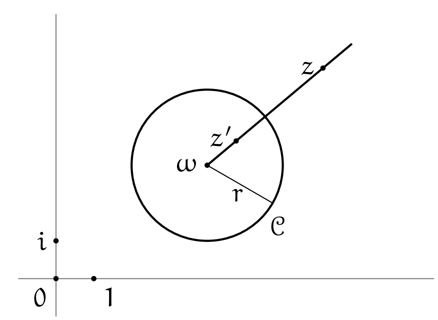
2. $M \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$. Notons $M' = \iota(M)$ et $M'' = \iota(M')$. Comme $M'' \in [\Omega, M')$ et $M' \in [\Omega, M)$ alors M'' appartient à la demi-droite $[\Omega, M)$. Les relations entre les distances sont d'une part $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$ et $\Omega M' \cdot \Omega M'' = r^2$. D'où les égalités $\Omega M \cdot \Omega M' = \Omega M' \cdot \Omega M''$, puis $\Omega M = \Omega M''$. Comme M et M'' sont sur la même demi-droite issue de Ω alors $M = M''$.

   Le bilan est le suivant $\iota\big(\iota(M)\big) = M$. L'application $M \mapsto \iota(M)$ est donc une involution. En particulier c'est une bijection.

□

2.2 Écriture complexe

Considérons les points et leur affixes $\Omega(\omega)$, $M(z)$, $M'(z')$. Nous allons transformer la relation $M' = \iota(M)$ en une condition entre z et z'. La première condition $M' \in [\Omega M)$ s'écrit $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$. La deuxième condition $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$ devient en écriture complexe $|z - \omega| \cdot |z' - \omega| = r^2$, ce qui donne à l'aide de la première condition $\lambda|z - \omega|^2 = r^2$ donc $\lambda = \frac{r^2}{|z-\omega|^2}$. Nous exprimons alors z' comme une fonction de z :



$$z' = \omega + r^2 \frac{z - \omega}{|z - \omega|^2} = \omega + \frac{r^2}{\overline{z - \omega}}.$$

Ceci nous permet de donner la définition complexe de l'inversion :

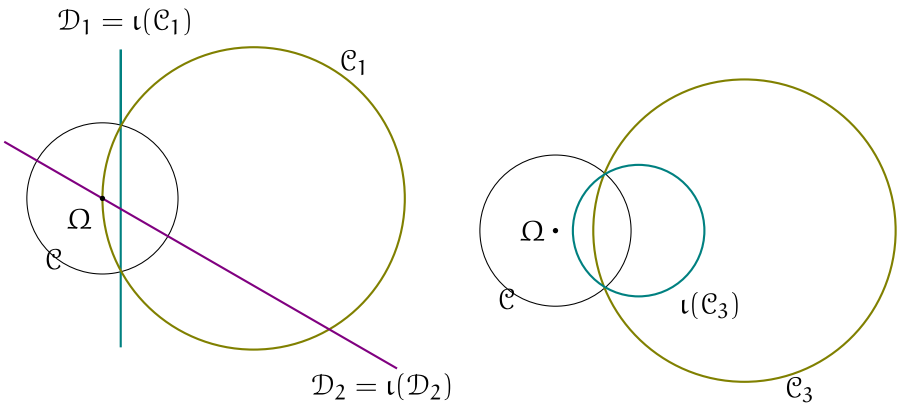
L'***inversion*** est une application $\iota : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définie par $\iota(z) = \omega + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{\omega}}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ et prolongée par $\iota(\omega) = \infty$ et $\iota(\infty) = \omega$.

Exemple 3. L'inversion de cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ a pour écriture complexe $\iota(z) = 1/\bar{z}$ (que l'on prolonge en $\iota(0) = \infty$ et $\iota(\infty) = 0$.

2.3 Inversion et cercle-droite

Théorème 1. L'image d'un cercle-droite par une inversion est un cercle-droite.

Plus précisemment nous allons montrer que si ι est l'inversion de cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ alors :
- L'image d'une droite passant par Ω est elle-même.
- L'image d'une droite ne passant pas par Ω est un cercle passant par Ω.
- L'image d'un cercle passant par Ω est une droite ne passant pas par Ω.
- L'image d'un cercle ne passant pas par Ω est une cercle ne passant pas par Ω.



Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour une translation l'image d'une droite est une droite et l'image d'un cercle est un cercle. Il en va de même pour les homothéties. Donc par une translation, nous nous ramenons à démontrer la proposition dans le cas où le centre de l'inversion est situé à l'origine du plan complexe. Par une homothétie nous supposons même que le cercle d'inversion est de rayon 1. Après ces deux réductions nous nous sommes ramenés au cas où l'inversion a pour écriture complexe :

$$\iota(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Soit maintenant $\mathcal{C}$ un cercle droite d'équation $az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k$ ($a, k \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$). Soit $M(z)$ un point du plan (d'affixe z) et notons M' l'image de M par notre inversion qui sera donc d'affixe $z' = \iota(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

$$\begin{aligned}
M(z) \in \mathcal{C} &\iff az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k \\
&\iff a - \bar{\omega}\frac{1}{\bar{z}} - \omega\frac{1}{z} = \frac{k}{z\bar{z}} \quad \text{en divisant par } z\bar{z} \\
&\iff a - \bar{\omega}z' - \omega\bar{z}' = kz'\bar{z}' \\
&\iff kz'\bar{z}' + \bar{\omega}z' + \omega\bar{z}' = a
\end{aligned}$$

Mais la dernière ligne est l'équation d'un autre cercle-droite $\mathcal{C}'$. Bilan $M(z) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\iota(M) \in \mathcal{C}'$. Autrement dit l'image du cercle-droite $\mathcal{C}$ est le cercle-droite $\mathcal{C}'$.
Il suffit de regarder les équations pour obtenir les différents cas. Par exemple si notre cercle-droite passe par l'origine (c'est le cas lorsque $k = 0$) il faut traiter le cas $z = 0$ à part ; il faut se rappeller notre convention $\iota(0) = \infty$. Dans ce cas l'équation obtenu pour $\mathcal{C}'$ est celle d'une droite.

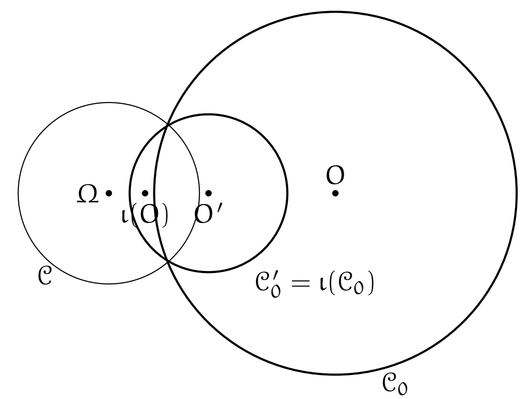
$\square$

Remarque. – L'image d'une droite $\mathcal{D}$ passant par le centre d'une l'inversion ι est la droite elle même : $\iota(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. La droite est ***invariante globalement***. Un point de la droite est envoyé sur un autre point de la droite. Par contre chaque point du cercle d'inversion est conservé par l'inversion : c'est l'***invariance point par point***. Si $\mathcal{C}$ est le cercle d'inversion, cela s'écrit :

$$\forall P \in \mathcal{C} \quad \iota(P) = P.$$

La droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine *n'est pas* invariante point par point.

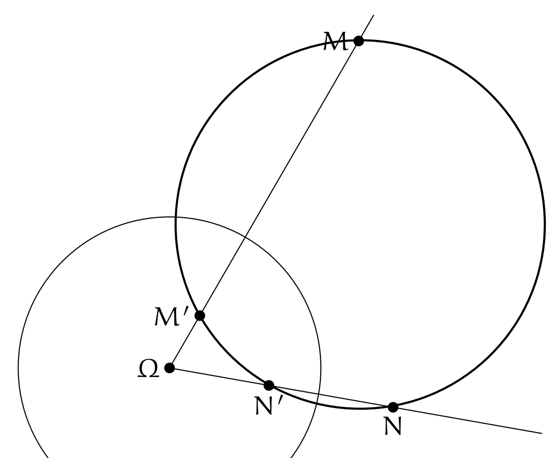
– Même si l'image d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O est un cercle $\mathcal{C}' = \iota(\mathcal{C})$ cependant $\iota(O)$ *n'est pas* le centre de $\mathcal{C}'$. Voir la figure.



2.4 Inversion et cocyclicité

Proposition 3. Soient ι un inversion et M, N deux points du plans. Les points M, N, $\iota(M)$, $\iota(N)$ sont cocycliques (ou alignés).

C'est un résultat important et utile qui est démontré dans l'exercice 3.



3 Les homographies

3.1 Définition

Une ***homographie*** est une application $h : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définie par

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad h(\infty) = \frac{a}{c}, \quad h(-d/c) = \infty,$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Proposition 4. Une homographie est la composée d'une inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$, d'une réflexion $z \mapsto \bar{z}$, de translations $z \mapsto z + \alpha$ et de rotation-homothéties $z \mapsto \lambda z$ ($\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$).

En particulier une homographie est une application bijective.

Démonstration. Tout d'abord par la composition d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation nous définissons $h_1(z) = cz + d$. Puis $h_2(z) = \frac{1}{z}$ est la composée d'une inversion $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ et d'une réflexion $z \mapsto \bar{z}$. Nous obtenons donc $h_2 \circ h_1(z) = \frac{1}{cz+d}$. Posons $h_3(z) = \alpha z + \beta$ (encore la composition d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation) alors

$$h_3 \circ h_2 \circ h_1(z) = \frac{\alpha}{cz+d} + \beta = \frac{\beta cz + \beta d + \alpha}{cz+d} = \frac{az+b}{cz+d}$$

si l'on a choisit $\beta = \frac{a}{c}$ et $\alpha = b - \frac{a}{c}d$. $\square$

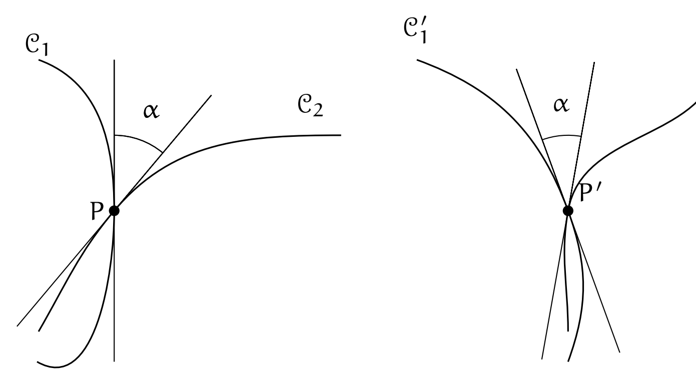
Corollaire 1. L'image par une homographie d'un cercle-droite est un cercle-droite.

Démonstration. L'image d'une droite par une translation est une droite. De même l'image d'une cercle par une translation est un cercle. Il en va de même pour les rotations, pour les homothéties et pour les réflexions. L'image d'un cercle par une inversion est un cercle ou une droite, l'image d'une droite par une inversion est un cercle ou une droite. Par composition l'image d'une cercle-droite par une homographie est un cercle-droite. $\square$

3.2 Homographie et angles

Théorème 2. Les homographies préservent les angles orientés.

Cela signifie ceci : si deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ s'intersectent en un point P. Soit α l'angle formé par les deux tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en P. Soit h notre homograhie h ; notons $\mathcal{C}'_1 = h(\mathcal{C}_1)$, $\mathcal{C}'_2 = h(\mathcal{C}_2)$, et $P' = h(P)$ qui appartient à l'intersection de $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$. Alors les deux tangentes à $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ en P forment le même angle α.
Dans la pratique le corollaire suivant est très utile :



Corollaire 2. Soit h une homographie. Si deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangentes en un point M (resp. perpendiculaires en M) alors les courbes $h(\mathcal{C}_1)$ et $h(\mathcal{C}_2)$ sont tangentes en $h(M)$ (resp. perpendiculaires en $h(M)$).

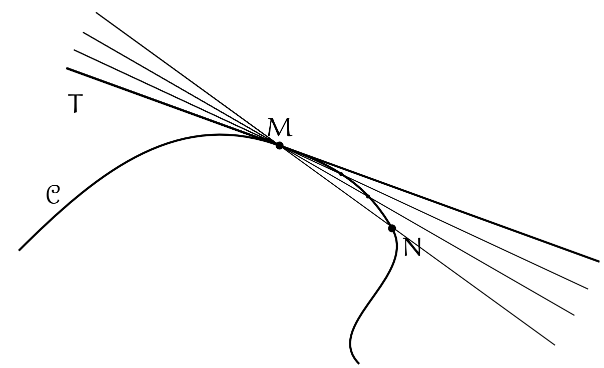
Et on prouve en fait en même temps que :

Corollaire 3. Soit ι une inversion. Si deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangentes en un point M (resp. perpendiculaires en M) alors les courbes $\iota(\mathcal{C}_1)$ et $\iota(\mathcal{C}_2)$ sont tangentes en $h(M)$ (resp. perpendiculaires en $\iota(M)$).

[[[dessin]]]

Démonstration. – Encore une fois nous allons ramener le problème à l'étude d'une inversion. En effet les homothéties, translations, rotations préservent les angles orientés alors qu'une reflexion préserve les angles mais change l'orientation. Par la proposition 4 il suffit donc de montrer qu'une inversion préserve aussi les angles mais change l'orientation.

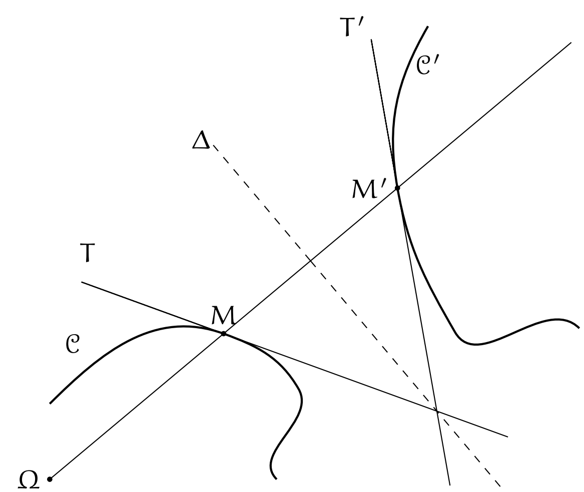
– On se donne une courbe $\mathcal{C}$ et un point $M \in \mathcal{C}$, notons T la tangente à M en $\mathcal{C}$ (nous supposons donc qu'il existe une tangente en ce point). Soit N un autre point de $\mathcal{C}$. Soit ι une inversion. On note $\mathcal{C}' = \iota(\mathcal{C})$, $M' = \iota(M)$, $N' = \iota(N)$ et on appelle T' la tangente à $\mathcal{C}'$ en M'. (Attention T' n'est pas égal à $\iota(T)$, de toute façon $\iota(T)$ n'est pas nécessairement une droite...)



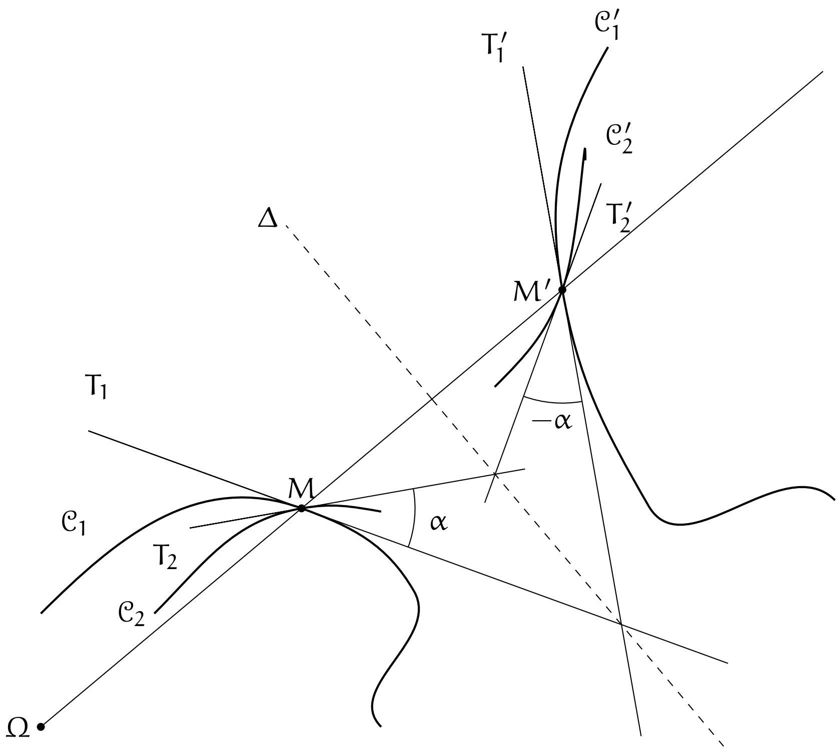
– D'après la proposition 3 les points M, N, M', N' sont cocycliques, donc les angles $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN'})$ et $(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'N})$ sont égaux.

– Faisons tendre le point N vers le point M alors la droite définie par le vecteur $\overrightarrow{MN}$ et passant par M tend vers la tangente T. De plus N' tend vers M' et la droite de vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ et passant par M' tend vers T'. À la limite on obtient l'égalité des angles : $(T, \overrightarrow{MM'}) = (T', \overrightarrow{M'M})$.

– En conséquence les tangentes T et T' sont symétriques l'une de l'autre par la réflexion d'axe Δ la médiatrice de $[MM']$.



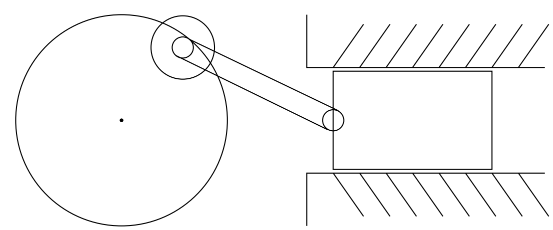
– Si maintenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux courbes qui s'intersectent en M, l'angle entre les deux tangentes T_1 et T_2 étant α alors par la réflexion d'axe Δ, l'angle entre les deux tangentes T'_1 et T'_2 en $M' = \iota(M)$ est $-\alpha$.



□

4 Dispositifs mécaniques

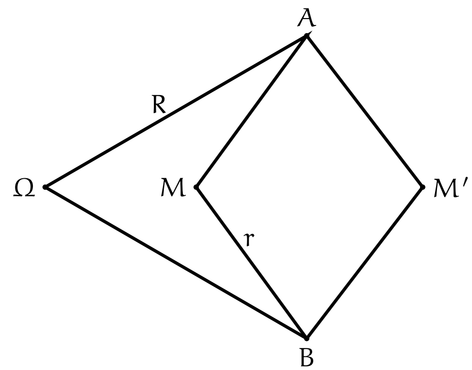
4.1 La courbe de Watt



Le but est de transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne (ou l'inverse). Une solution simple est d'utiliser une bielle et un piston. Le problème est que le coulissage génère des frottements au niveau du piston. [[[dessin à améliorer !]]]

L'ingénieur James Watt améliora le dispositif en inventant un mécanisme qui permet d'obtenir une portion presque rectiligne à partir d'un mouvement circulaire. [[[Dessin : essayer animation avec Geogebra]]]

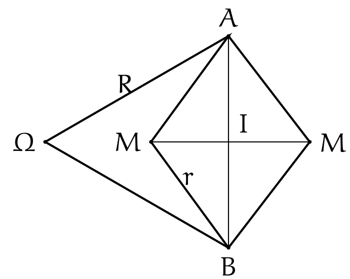
4.2 L'inverseur de Peaucellier



Théorème 3. Soit la configuration suivante avec $\Omega A = \Omega B = R$ et $AMBM'$ un losange de côté r. Alors M' est l'image de M par l'inversion de centre Ω et de puissance $R^2 - r^2$.

Corollaire 4. Si M parcourt un cercle passant par Ω alors M' parcourt une droite.

[[[Dessin]]]
Il existe d'autres dispositifs mécanique qui transforment un cercle en une droite, voir par exemple l'inverseur de Hart dans l'exercice 8.



Preuve du théorème. Tout d'abord M, M', Ω sont sur la médiatrice du segment $[AB]$. Donc $M' \in (\Omega M)$. De plus si l'on suppose $R > r$ alors $M' \in [\Omega M)$.
Calculons maintenant $\Omega M \cdot \Omega M'$. Soit I le centre du losange $AMBM'$. $\Omega M = \Omega I - IM$ et $\Omega M' = \Omega I - IM' = \Omega I + IM$. Donc $\Omega M \cdot \Omega M' = (\Omega I - IM)(\Omega I + IM) = \Omega I^2 - IM^2$. Par le théorème de Pythagore $\Omega I^2 = \Omega A^2 - IA^2$ et $IM^2 = AM^2 - IA^2$. Donc $\Omega M \cdot \Omega M' = \Omega A^2 - AM^2 = R^2 - r^2$.
Nous avons montré que M' est l'image de M par l'inversion de centre Ω et de puissance $R^2 - r^2$. $\square$

4.3 Théorème de Kempe

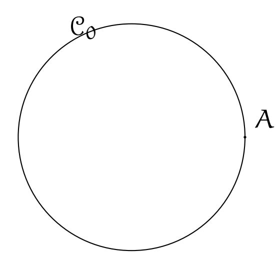
Il existe en fait un théorème plus général.

Théorème 4. Soit $P(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ un polynôme de deux variables. Il existe un dispositif mécanique qui permet de tracer une partie bornée de la courbe $\mathcal{C}$ définie par l'équation $(P(x, y) = 0)$.

[[[Admis. Étapes.]]]

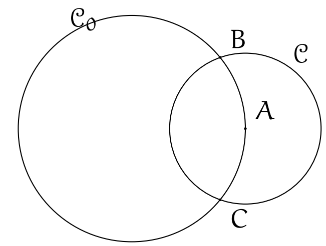
5 Construction au compas seulement

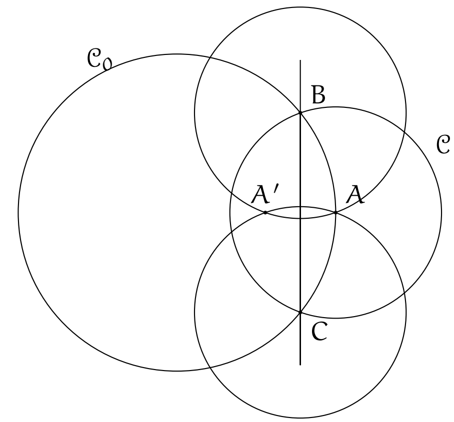
5.1 Problème de Napoléon

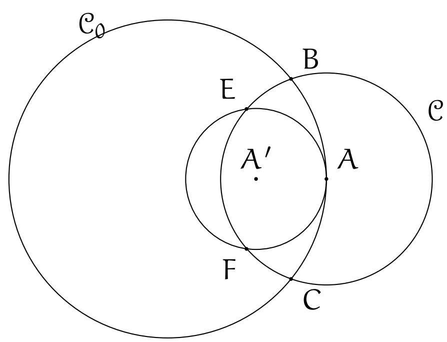


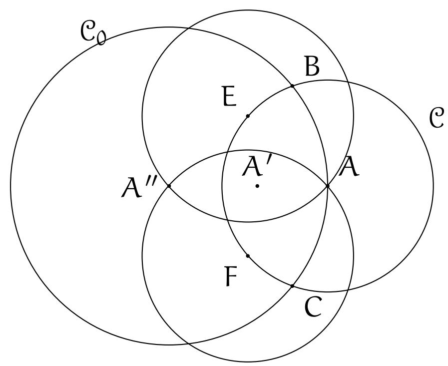
Traçons un cercle, effaçons le centre. Il est facile de retrouver le centre avec une règle et un compas. (Faites-le !) Oublions maintenant la règle.
Problème de Napoléon. À l'aide du compas seulement, tracer le centre d'un cercle dont on connait uniquement le contour.
La solution, qui n'a rien d'évidente, utilise l'inversion et se décompose en plusieurs étapes :

1. Soit $\mathcal{C}_0$ le cercle dont on souhaite trouver le centre. Choisir un point A sur $\mathcal{C}_0$ et prendre un écartement quelconque de compas (mais ni trop grand, ni trop petit : entre une demie fois et deux fois le rayon –inconnu– du cercle $\mathcal{C}_0$)
2. Placer la pointe du compas en A et tracer le cercle $\mathcal{C}$. Ce cercle coupe $\mathcal{C}_0$ en deux points, notés B et C.
3. Construire A' le symétrique de A par rapport à (BC) : pour cela, tracer les cercles de centre B (puis de centre C) passant par A. Ces deux cercles se coupent en A et A'.
4. Construire l'image de A' par l'inversion ι de centre A et de cercle $\mathcal{C}$. Pour cela on trace le cercle de centre A' passant par A ; il recoupe $\mathcal{C}$ en D et E. Les cercles de centres D (puis de centre E) passant par A se coupent en A et en $A'' = i(A)$.
5. A'' est le centre de $\mathcal{C}_0$.









5.2 Preuve

Dans une première étape nous monrons que $\iota(A')$ est le centre de $\mathcal{C}_0$ où ι est l'inversion de centre A et de cercle d'inversion $\mathcal{C}$.

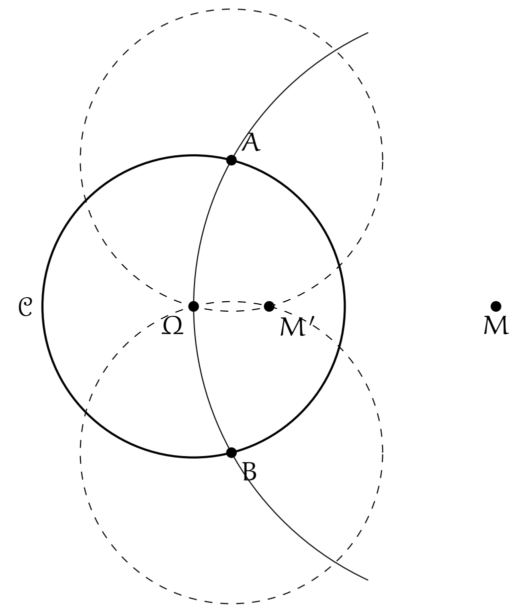
– L'image de (BC) est un cercle passant par B, C, Ω, c'est donc bien $\mathcal{C}_0$.
– Notons I le milieu de $[AA']$, c'est aussi le milieu de $[BC]$. Notons D le point de $\mathcal{C}_0$ diamétralement opposé à A.
– L'image de I est D (par alignement) donc $AI \cdot AD = r^2$, ici r désigne le rayon de $\mathcal{C}$.
– Notons $A'' = \iota(A')$ alors $AA' \cdot AA'' = r^2$. Mais comme $AA' = 2AI$ alors $AA'' = AD/2$, donc $A'' = O$ est le centre de $\mathcal{C}_0$.

[[[dessin]]]

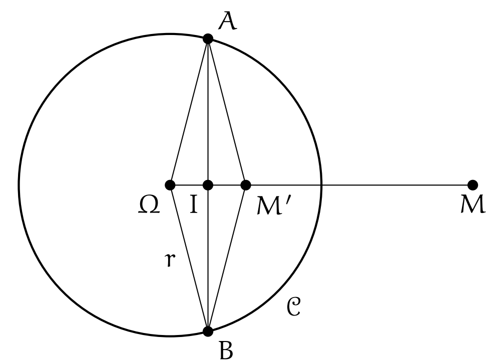
La dernière étape de notre construction est justifiée dans le paragraphe suivant.

5.3 Construction de l'inverse d'un point au compas seul

Étant donné un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et un point M extérieur à $\mathcal{C}$, nous allons construire, avec le compas seulement, l'image de M par l'inversion ι de cercle $\mathcal{C}$.
– Tracer le cercle $\mathcal{C}'$ de centre M passant par Ω, il recoupe $\mathcal{C}$ en A et B.
– Tracer les cercles de centre A (puis de centre B) passant par Ω. Ils se coupent en Ω et en $M' = \iota(M)$.



Démonstration. Le théorème de Pythagore dans le triangle $\triangle AIM$ donne $\Omega M^2 - AI^2 = (\Omega M - IM)^2 = (\Omega M - I\Omega)^2$ (on sait $AM = \Omega M$). Donc $\Omega M^2 - AI^2 = \Omega M^2 + IM^2 - 2\Omega M \cdot I\Omega$. Alors $\Omega M \cdot \Omega M' = \omega M \cdot (2I\Omega) = I\Omega^2 + AI^2$. Par le théorème de Pythagore, cette fois dans le triangle $\triangle AI\Omega$ nous obtenons $\Omega M \cdot \Omega M' = A\Omega^2 = r^2$. Comme en plus M, M', Ω sont alignés (car sur la médiatrice de $[AB]$) alors $M' = \iota(M)$. □



Remarque. Deux cercles, dont l'un est l'image de l'autre par une inversion sont homothétiques, par une homothétie dont le centre est le centre de l'inversion. Par contre le rapport dépend des cercles considérés.

5.4 Théorème de Mohr-Masheroni

Théorème 5. Toute construction possible à la règle et au compas est possible au compas seulement.

Bien sûr il faut quand même exclure la tracé effectif des droites.
[[[Preuve]]]