

III. Jouons avec la symétrie

Les cristaux présentent une «certaine symétrie»

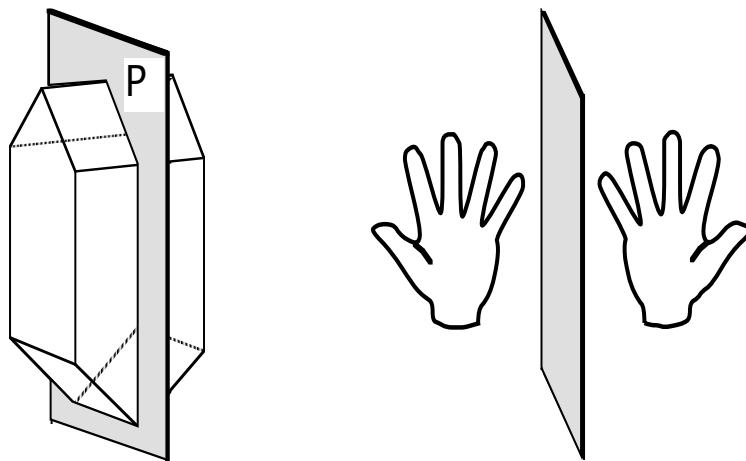
Les cristaux bien développés montrent des faces planes limitées par des arêtes qui elles-mêmes convergent vers des sommets. En observant attentivement les cristaux, on constate qu'ils présentent une “**certaine symétrie**”.

Ce terme de symétrie recouvre en fait une discipline abstraite qui relève des lois de la géométrie. Il s'agit de lois de répétitions effectuées par des **opérateurs de symétrie** dont les principaux sont **le plan de symétrie**, **l'axe de symétrie** et **le centre d'inversion**.

Le plan de symétrie, comme un miroir

C'est un plan qui caractérise les symétries bilatérales. Il dédouble les éléments d'un objet, agissant comme un miroir. Toutes les faces, arêtes et sommets d'un cristal retrouvent une image identique (mais non superposable) de l'autre côté du plan. Ainsi, vue dans un miroir, la main droite aura l'air d'une main gauche. On qualifie **d'énantiomorphes** de tels objets identiques mais non superposables.

Si tous les points d'un objet peuvent être répétés sur des normales à un plan, à égale distance de part et d'autre de celui-ci, on dit qu'il possède un plan de symétrie.



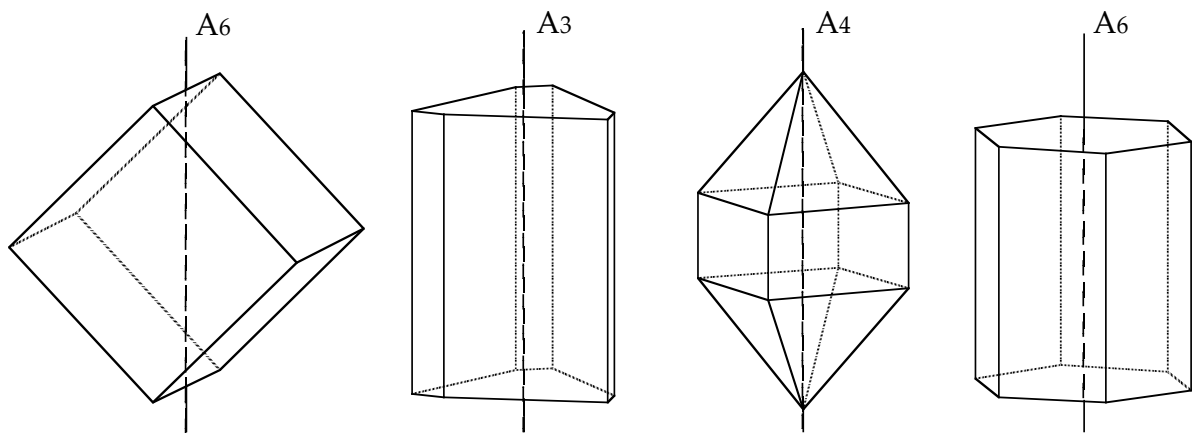
Plan de symétrie.

*Le plan de symétrie produit des objets non superposables, dits «**énantiomorphes**»*

Les axes de symétrie, comme un carrousel !

Ici, toutes les faces, arêtes et sommets sont "répétés" par rotation autour d'un axe. Au cours d'une rotation complète (360°), chaque élément est répété 2, 3, 4 ou 6 fois, suivant l'ordre de l'axe. Dans le monde minéral il n'existe que des axes d'ordre 2, 3, 4 et 6.

Si, au cours d'une rotation de 360° autour d'une droite, un objet prend n positions identiques telles qu'une d'entre elles ne peut pas être distinguée de la précédente, on dit qu'il possède un axe de symétrie d'ordre n .

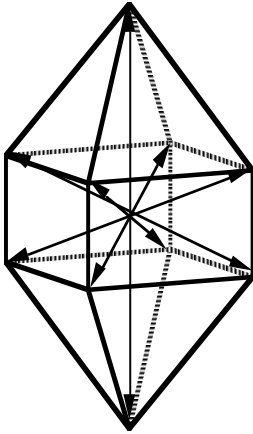


Axes de symétrie d'ordre 2, 3, 4 et 6. On voit que les axes peuvent passer par le milieu d'arêtes opposées, par le milieu de faces opposées ou par des sommets opposés.

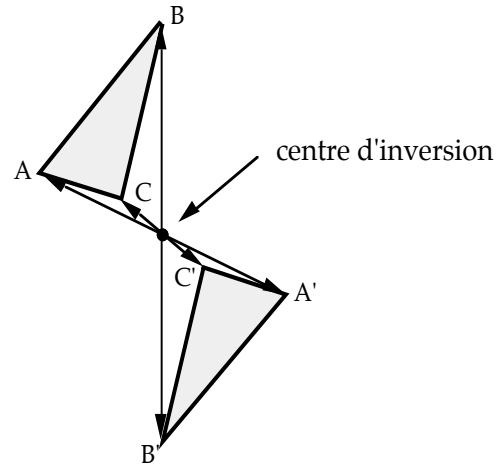
Le centre d'inversion

Toutes les faces de la forme cristalline sont reproductibles deux à deux par inversion de leurs sommets et de leurs arêtes par rapport à un centre d'inversion, appelé parfois aussi centre de symétrie.

Si tous les points d'un objet peuvent être répétés sur des droites concourantes à un point et à égales distances de part et d'autre de celui-ci, on dit qu'il possède un centre d'inversion.



Forme cristalline avec un centre d'inversion.



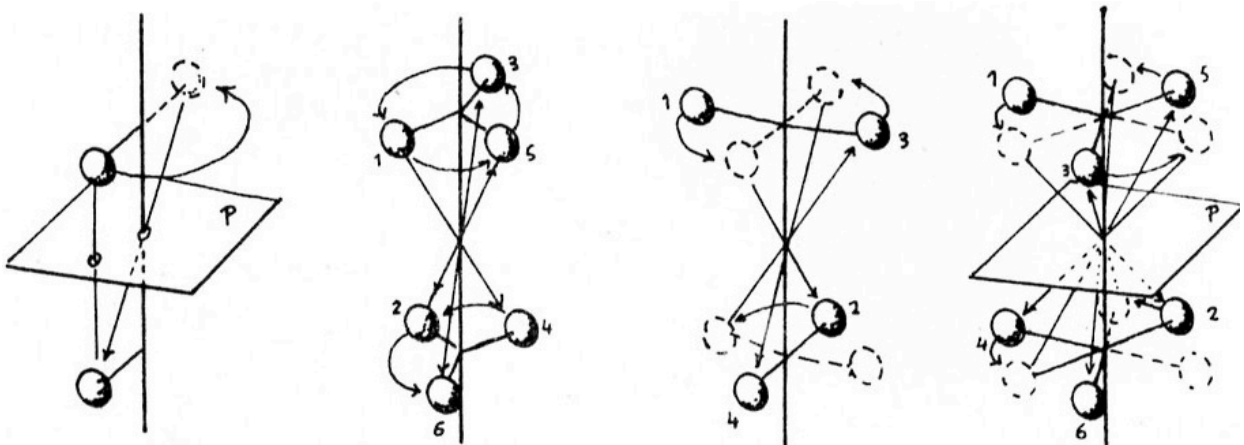
Mécanisme de l'inversion.

Chaque face d'une forme cristalline ayant un point d'inversion, possède une face équivalente parallèle. Cette particularité permet de reconnaître la présence ou l'absence de cet opérateur de symétrie.

Les axes de symétrie inverses

L'axe inverse est un opérateur multiple qui associe deux opérations : un axe et un point d'inversion.

On dit qu'un objet possède un axe d'inversion d'ordre n si tous ses points peuvent être répétés par une rotation de $360^\circ/n$ suivie d'une inversion par rapport à un point situé sur cet axe.

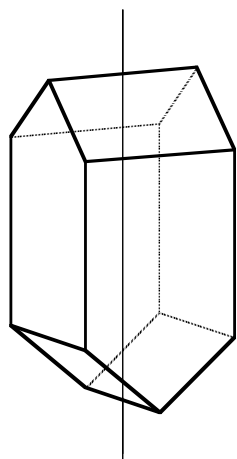


Axes d'inversion d'ordre 2, 3, 4 et 6. On remarque que l'axe inverse d'ordre 2 correspond à une réflexion sur un plan normal. De même, l'axe inverse d'ordre 6 correspond à un axe direct d'ordre 3 associé à un plan perpendiculaire.

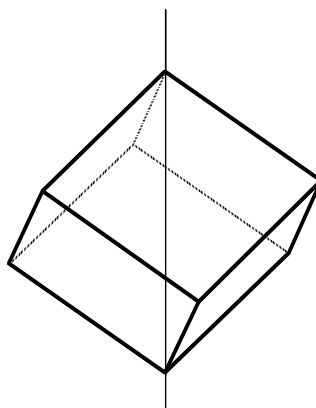
Opérateurs de symétrie ponctuelle et symboles qui les désignent

Opérateur	Opération	Multiplicité	Notation pratique	Not. internationale	Opérateurs équivalents
axe d'ordre 2	rotation	2	A_2	2	
axe d'ordre 3	"	3	A_3	3	
axe d'ordre 4	"	4	A_4	4	
axe d'ordre 6	"	6	A_6	6	
plan	réflexion	2	P	m	
centre	inversion	2	C	i	peut être considéré comme un axe inverse d'ordre 1
axe inv. d'ordre 2	rot. + inv.	2	P	$2 = m$	équivalent à un plan normal à l'axe
axe inv. d'ordre 3	rot. + inv.	6	A^6	3	équivalent à $A_3 + C$
axe inv. d'ordre 4	rot. + inv.	4	A^4	4	identité propre
axe inv. d'ordre 6	rot. + inv.	6	$(A_3 P_3)$	6	équivalent à $A_3 + P_3$ (plan normal)

Les axes inverses peuvent tous être exprimés par des combinaisons d'opérateurs simples, à l'exception de l'axe inverse d'ordre 4 qui est le seul à présenter une identité propre.



Prisme et sphénoèdre quadratiques avec leur axe inverse d'ordre 4.



Rhomboèdre avec son axe inverse d'ordre 3.

Combinaisons d'opérateurs de symétrie

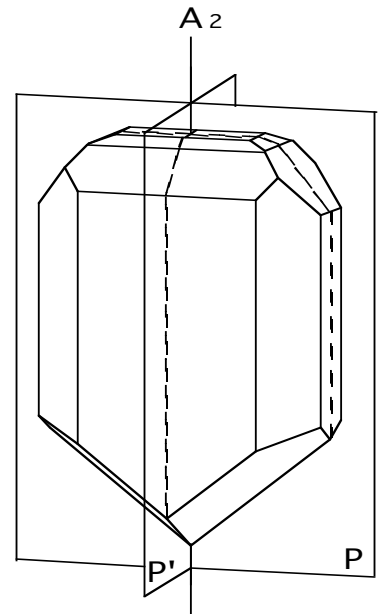
La symétrie de chaque forme cristalline est conditionnée par la présence d'un certain nombre d'opérateurs de symétrie.

Par exemple, l'hémimorphite (un silicate de zinc) possède 2 plans de symétrie et un axe d'ordre 2 passant par l'intersection des plans. Certains cristaux présentent une symétrie basse : un seul axe, un plan, alors que d'autres présentent une symétrie élevée, caractérisée par la présence de

nombreux opérateurs de symétrie. Le cube, par exemple, comporte 13 axes de symétrie, un centre d'inversion et 9 plans.

L'ensemble des opérateurs de symétrie qui caractérisent une forme cristalline constitue sa **formule de symétrie**. Il est intéressant de noter que tous les opérateurs de symétrie caractérisant un objet, concourent en un point commun au centre de cet objet. Pour cette raison on parle de **symétrie ponctuelle**.

Les combinaisons d'opérateurs de symétrie obéissent à des lois très strictes (des théorèmes) qui en limitent le nombre. Ainsi, dans le monde minéral, on ne trouve que 32 combinaisons possibles qui définissent les **32 classes de symétrie**. Chaque espèce minérale appartient nécessairement à l'une de ces 32 classes. Les théorèmes de symétrie constituent un auxiliaire précieux dans la recherche des "**formules de symétrie**" et permettent de reconstituer facilement les 32 classes de symétrie.



Hémimorphite et ses trois éléments de symétrie.

Les 32 classes de symétrie

On peut reconstituer systématiquement les 32 classes de symétrie en examinant successivement les sept associations possibles d'opérateurs et, pour chacune d'elles, on essaye les diverses combinaisons d'axes, plans et centre d'inversion, en prenant soin de respecter les théorèmes de symétrie. Le tableau de la page 20 présente l'ensemble de ces combinaisons. Le tableau de la page 22 présente, sous une autre disposition, les 32 classes de symétrie.

Rappelons que la multiplicité M d'une classe de symétrie correspond au nombre de répétitions d'une face d'orientation quelconque (ni normale, ni parallèle à un axe) par les opérateurs de symétrie.

Dans chaque système, une classe possède la multiplicité maximum. Cette classe, la plus symétrique du système considéré, est l'**holoédrie**. Si la multiplicité diminue de moitié on a une **hémiédrie**; si elle diminue encore une fois de moitié c'est une **tétartoédrie**.

Ces termes comportent parfois un préfixe ou sont remplacés par d'autres termes plus particuliers. Ainsi l'**holoaxie** est une mériédrie qui n'a conservé que les axes, alors que dans l'exemple de l'**hémimorphite** (ci-dessus) est

caractérisée par la disparition du plan normal à un axe principal. On utilise parfois le préfixe **para-** pour les hémiedries centrées et **anti-** lorsqu'il n'y a pas de centre.

Les principaux théorèmes de symétrie ponctuelle

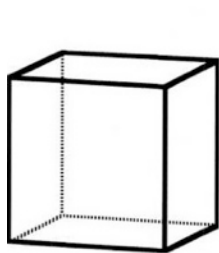
1	Une forme cristalline ne peut avoir que des axes d'ordre 2, 3, 4, 6. (Il s'agit d'un théorème restrictif qui ne s'applique qu'aux substances cristallisées)
2 _a	un plan perpendiculaire à un axe d'ordre pair entraîne l'existence d'un centre d'inversion;
2 _b	un centre d'inversion situé sur un plan implique l'existence d'un axe d'ordre pair normal au plan et passant par le centre;
2 _c	un centre situé sur un axe pair entraîne l'existence d'un plan normal à l'axe et passant par le centre. (C'est un théorème important. On peut le résumer en disant que pour les trois opérateurs, axe pair, plan normal et centre d'inversion, l'existence de deux d'entre eux entraîne l'existence du troisième)
3	un plan normal à un axe impair (axe d'ordre 3) interdit la présence d'un centre;
4 _a	la présence d'un axe binaire perpendiculaire à un axe d'ordre k entraîne l'existence de k axes binaires perpendiculaires à cet axe; l'angle déterminé par deux axes binaires est alors égal à π/k ;
4 _b	dans une figure qui n'a que k axes binaires situés dans un même plan, la perpendiculaire au plan est alors un axe d'ordre k ;
5 _a	si une figure a un axe d'ordre k et un plan passant par cet axe, cela entraîne l'existence de k plans passant par l'axe; l'angle entre deux plans est alors π/k ;
5 _b	si une figure n'a que k plans passant par une droite, celle-ci est un axe d'ordre k ;
6	lorsqu'il y a plus d'un axe d'ordre supérieur à 2, les seules combinaisons possibles d'axes sont $3A_2 4A_3$ ou $3A_4 4A_3 6A_2$. Toutefois les axes d'ordre 3 et 4 peuvent devenir des axes inverses;
7 _a	un axe impair devient un axe inverse s'il existe un centre;
7 _b	un axe inverse impair implique l'existence d'un centre et exclut l'existence d'un plan normal;
7 _c	un axe inverse d'ordre 4 est un opérateur qui n'admet ni plan normal ni centre.

On voit donc que les 32 classes de symétrie se répartissent à leur tour en sept systèmes cristallins, définis chacun par une association particulière d'opérateurs de symétrie. Ces sept systèmes correspondent aussi à sept parallélépipèdes dont les arêtes serviront d'axes de coordonnées pour les représentations graphiques des cristaux.

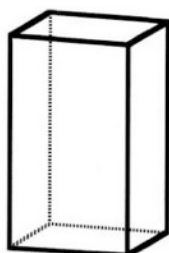
Les sept systèmes cristallins

Système	Caractéristique	Multiplicité de l'holoédrie
<i>cubique</i>	4 axes d'ordre 3	48
<i>quadratique</i>	un axe principal d'ordre 4	16
<i>orthorhombique</i>	3 éléments binaires	8
<i>monoclinique</i>	un élément binaire	4
<i>hexagonal</i>	un axe principal d'ordre 6	24
<i>rhomboédrique</i>	un axe principal d'ordre 3	12
<i>triclinique</i>	axe direct ou inv. d'ordre 1 (C ou rien)	2

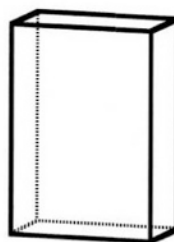
On appelle holoédrie une forme qui présente la totalité des éléments de symétrie du système. La multiplicité est le nombre de fois qu'une face orientée d'une manière quelconque est répétée par les éléments de symétrie.



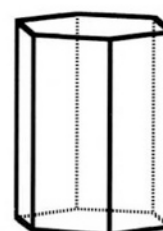
Cubique
Cube



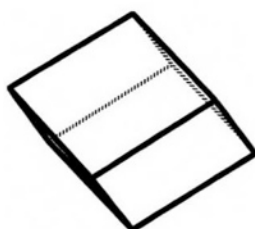
Quadratique
Prisme droit
à base carrée



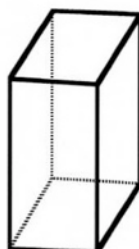
Orthorhombique
Prisme droit
à base rectangle



Hexagonal
Prisme droit à base
hexagonale



Rhomboédrique
rhomboèdre



Monoclinique
prisme oblique
à base rectangle



Triclinique
prisme oblique sur
toutes les arêtes

Les 32 classes de symétrie

Système	Formule de symétrie	Mult.	Classe	Not.intern.
Cubique	$3A_4 4A_6^{6/3} 6A_2 C 3P_4 6P_2$	48	holoédrie	$m\bar{3}m$
	$3A_4 4A_3 6A_2$	24	holoaxie	432
	$3A_4^{4/2} 4A_3 6P_2$	24	antihémiédrie	43m
	$3A_2 4A_6^{6/3} C 3P_2$	24	parahémiédrie	$m\bar{3}$
	$3A_2 4A_3$	12	tétartoaxie	23
Quadratique	$A_4 2A_2 2A_2 C P_4 2P_2 2P_2$	16	holoédrie	4/mmm
	$A_4 2A_2 2A_2$	8	holoaxie	422
	$A_4 2P_2 2P_2$	8	hémimorphie	4mm
	$A_4 C P_4$	8	parahémiédrie	4/m
	$A_4^{4/2} 2A_2 2P_2$	8	antihémiédrie	42m
	$A_4^{4/2}$	4	tétartoédrie	4
	A_4	4	tétartoédrie hémimorphe	4
Monoclinique	$A_2 C P_2$	4	holoédrie	2/m
	A_2	2	holoaxie	2
	P_2	2	antihémiédrie	m
Orthorhombique	$A_2 A_2 A_2 C P_2 P_2 P_2$	8	holoédrie	mmm
	$A_2 A_2 A_2$	4	holoaxie	222
	$A_2 P_2 P_2$	4	hémimorphie	mm2
Hexagonal	$A_6 3A_2 3A_2 C P_6 3P_2 3P_2$	24	holoédrie	6/mmm
	$A_6 3A_2 3A_2$	12	holoaxie	622
	$A_6 3P_2 3P_2$	12	hémimorphie	6mm
	$A_6 C P_6$	12	parahémiédrie	6/m
	$A_3 3A_2 P_3 3P_2$	12	antihémiédrie	6m2
	$A_3 P_3$	6	tétartoédrie	6
	A_6	6	tétartoédrie hémimorphe	6
Rhomboédrique	$A_6^{6/3} 3A_2 C 3P_2$	12	holoédrie	3m
	$A_3 3A_2$	6	holoaxie	32
	$A_3 3P_2$	6	hémimorphie	3m
	$A_6^{6/3} C$	6	parahémiédrie	3
	A_3	3	tétartoédrie	3
Triclinique	C	2	holoédrie	1
	—	1	hémiédrie	1

Tableau 3.I Recherche systématique des 32 classes de symétrie

not. internat. ¹	axe(s) seul(s)	axe inverse	axe + plan perpendiculaire	axe + plans // à l'axe	axe + axes binaires perpendiculaires	axe + plans perpendi- culaires + plans // + C	axes inv.+ plans passant par l'axe
not. internat. ¹	X	$\bar{X}$	X / m	X m	X 2	X / mm	X m
triclinique		$\bar{1}$ (=C)					
monoclinique	A2	$\bar{2}$ (=P)	A2 C P2				
orthorhombique				A2 P2 P2	A2 A'2 A''2	A2 A'2 A''2 CP2 P'2 P''2	
rhomboédrique	A3	$\bar{3}$ (=A ou A3C)*	(A3 P3)	A3 3P2	A3 3A2	A ₃ ⁶ 3A2 C3 P2	(A ₃ ⁶ 3A2 C3 P2)
quadratique	A4	$\bar{4}$ (=A ₂ ⁴)	A4 C P4	A4 2P2 2P'2	A4 2A2 2A'2	A4 2A2 2A'2 C P4 2P2 2P'2	A ₂ ⁴ 2A2 2P'2
hexagonal	A6	$\bar{6}$ (=A3 P3)*	A6 C P6	A6 3P2 3P'2	A6 3A2 3A'2	A6 3A2 3A'2 C 3P2 3P'2	A3 3A2 P3 3P'2
cubique	3A2 4A3	A3 P3	3A2 4A3 C 3P2	3A4 4A3 6A2	3A4 4A3 6A2	3A4 4A3 6A2 C 3P4 6P2	3A ₂ ⁴ 4A3 6P2

¹ La notation dite "Hermann-Mauguin" est utilisée dans les tables internationales de cristallographie. Elle a l'avantage d'être très condensée mais présente l'inconvénient de ne pas être "visuelle". Elle est basée sur le principe suivant: X (un nombre) désigne un axe d'ordre X; $\bar{X}$ désigne un axe inverse d'ordre X; X/ m, un axe normal à un plan; X m, un plan passant par l'axe; X2, un axe d'ordre X avec des axes binaires normaux à cet axe; X/ mm, un axe avec les deux sortes de plans. Cette notation implique une parfaite connaissance des théorèmes de symétrie, car les éléments rendus obligatoires par ces derniers ne figurent pas dans la formule.

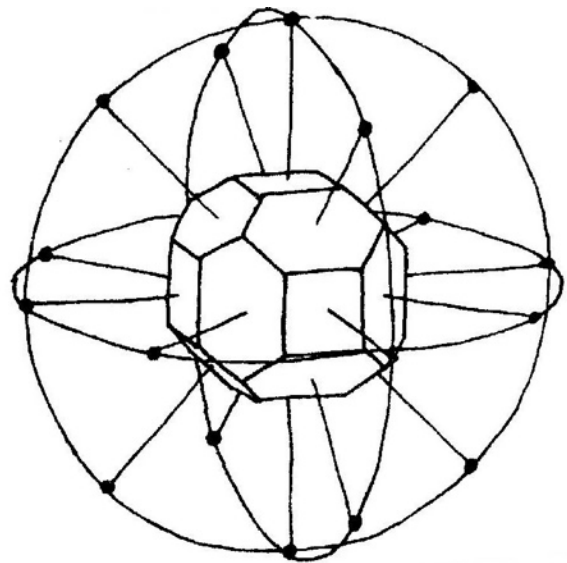
Ainsi 432 signifie 3A4 4A3 6A2 (théorème VII) et 3A4 4A3 6A2 C 3P4 6P2 devient 4/m3m, ce qui signifie axes d'ordre 4 avec plans normaux (4/m) et axes d'ordre 3 avec plans passant par les axes. Cette notation peut même encore être simplifiée: ainsi 4/m3m devient m3m!

* Rappelons que $\bar{3}$ s'exprime parfois A₃⁶ ou par son équivalent A3 C et que $\bar{6}$ est remplacé par son équivalent A3 P3. Pour des questions didactiques, nous utiliserons tantôt l'un, tantôt l'autre.

IV. Représentation graphique des cristaux

Nous n'allons pas traiter de la manière dont les cristaux sont dessinés, mais de leur représentation dans les divers systèmes de projection, en particulier la **projection stéréographique**.

Nous savons déjà que c'est l'orientation d'une face qui importe et non son contour ou l'importance de son développement. Aussi sommes-nous conduits à adopter un système de projection dite "polaire", pour représenter les faces d'un cristal. On procède en deux temps : tout d'abord on imagine le cristal au centre d'une sphère. Dès lors, chaque face est représentée par l'intersection avec la sphère de sa normale passant par le centre de la sphère. Ce point est qualifié de **pôle** de la face.

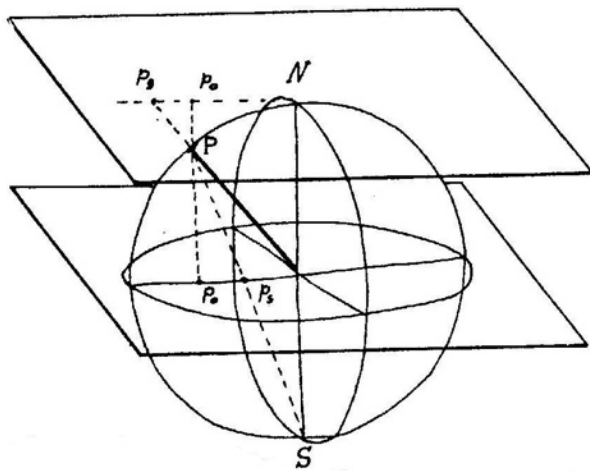


Pôles des faces d'un cristal sur une sphère.

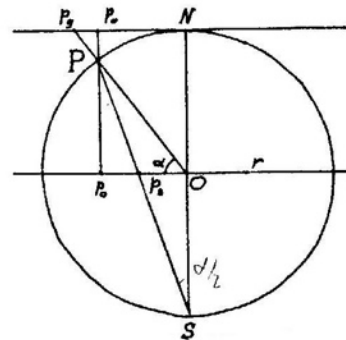
Il faut ensuite imaginer un système de projection sur un plan, de l'ensemble des pôles des faces. C'est le même problème que celui des géographes qui doivent représenter notre globe terrestre sur une carte de géographie plane. On peut imaginer trois sortes de projection du pôle P d'une face :

- la **projection orthogonale**, qui consiste à abaisser la normale du pôle P en un point P_o , sur le plan de projection (le plan équatorial ou le plan tangent au pôle nord de la sphère, dans notre exemple).
- la **projection gnomonique**, qui consiste à prolonger la polaire jusqu'au plan tangent à un des pôles de la sphère (P_g).
- La **projection stéréographique**, qui utilise le plan équatorial comme plan de projection et le pôle S comme point de vue (P_s).

C'est surtout la projection stéréographique qui est utilisée en cristallographie. Elle possède l'avantage sur les autres que la projection d'un cercle reste un cercle et que les angles entre les arcs de grands cercles (plans passant par le centre de la sphère) sont projetés en vraie grandeur.

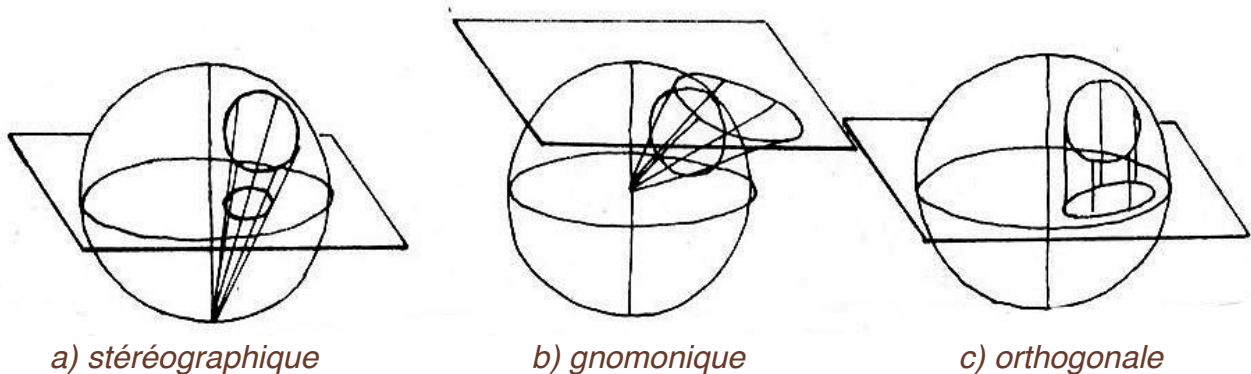


$$\begin{aligned} OP_o &= r \cos \alpha \\ NP_g &= r \operatorname{ctg} \alpha \\ OP_s &= r \operatorname{ctg} \alpha/2 \end{aligned}$$



Divers systèmes de projection du pôle P

P_o projection orthogonale
 P_g projection gnomonique
 P_s projection stéréographique



a) stéréographique

b) gnomonique

c) orthogonale

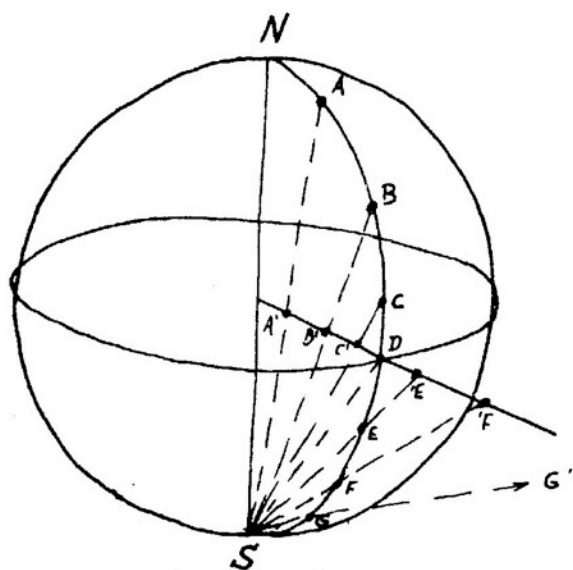
Représentation d'un cercle selon diverses projections.

La projection gnomonique est utilisée lorsqu'on veut dessiner des cristaux en perspective. La projection stéréographique est d'un emploi simple et commode. Elle peut être utilisée dans de nombreux problèmes se rapportant à l'orientation de plans dans l'espace, en particulier en géologie appliquée.

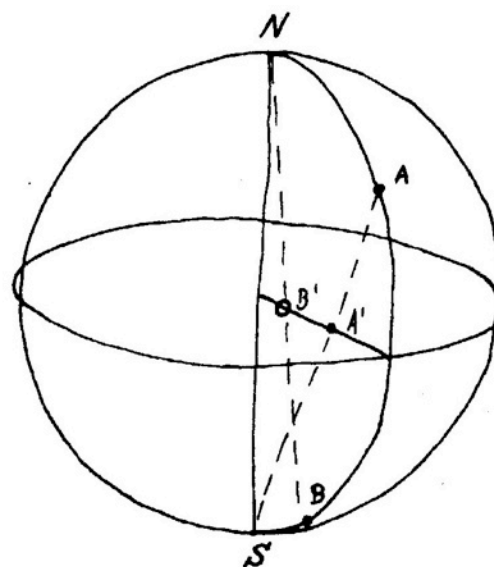
La projection stéréographique

La projection a lieu sur le plan défini par le cercle équatorial qu'on nomme **cercle de base** ou encore **cercle de projection**. Le point de vue est le pôle sud de la sphère. Les points situés dans l'hémisphère nord sont projetés à l'intérieur du cercle de base, ceux situés dans l'hémisphère sud sont projetés à l'extérieur. S'ils sont trop proches du point de vue, leur projection se trouve très loin du cercle de base. Aussi on peut adopter la convention que les points situés dans l'hémisphère sud sont projetés en utilisant le pôle nord

comme point de vue. On adopte alors des figurés différents suivant le point de vue utilisé.



Projection stéréographique utilisant le pôle sud comme point de vue.

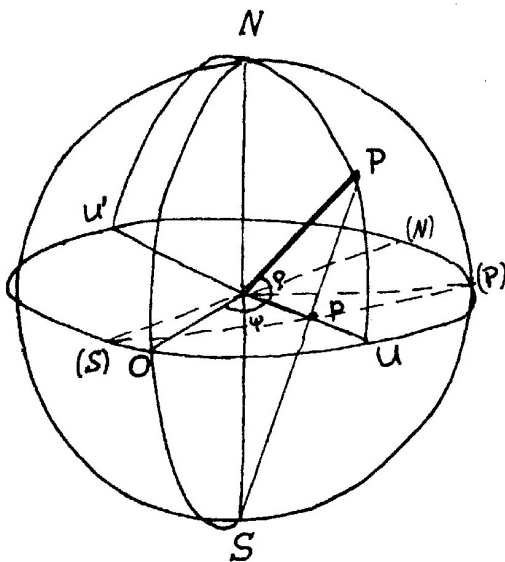


Projection stéréographique utilisant les deux pôles comme point de vue.

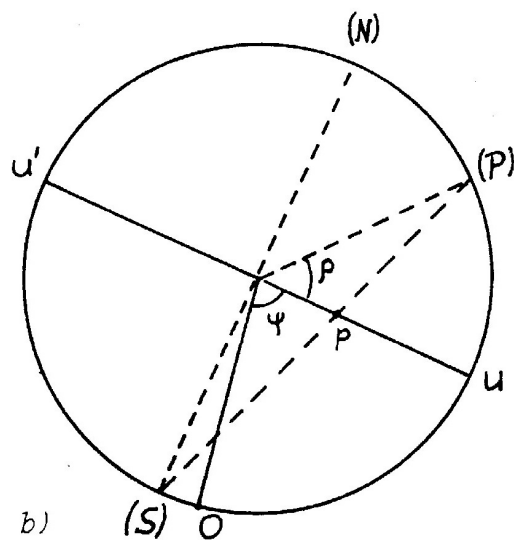
Constructions utilisées en projection stéréographique

Les divers problèmes de constructions sont basés sur le principe du rabattement. Prenons l'exemple le plus simple, celui de la projection d'un point P dont on connaît les coordonnées. Ces dernières sont semblables à celles utilisées pour situer un lieu sur le globe terrestre : on a l'angle ψ , comparable à la longitude, - angle entre la trace du méridien d'origine choisi arbitrairement et le méridien du point P et l'angle ρ , comparable à la latitude, qui est la hauteur angulaire du point P au-dessus du cercle équatorial.

La figure ci-dessous montre la perspective et la construction de la projection. Sur la projection on dessine la trace du méridien d'origine O . On dessine ensuite la trace du méridien du point P , qui se trouve à la distance angulaire ψ de O . La prolongation de cette dernière droite coupe le cercle de base en uu' . On effectue alors un rabattement, c'est à dire qu'on fait pivoter le grand cercle $uPNu'$ autour de la droite uu' . Sur la projection le point N vient en (N) , le point P en (P) et le pôle S en (S) . On peut alors tracer l'angle ρ qui se trouve maintenant dans le plan du dessin grâce au rabattement. On trace ensuite une droite entre (P) et le point de vue (S) et on trouve le point p , projection de P . Comme il se trouve sur l'axe de rotation, la rotation du plan $uPNu'$ le laisse invariant.



vue en perspective

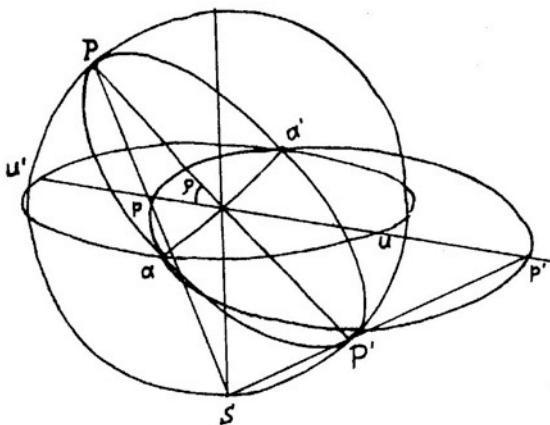


construction de la projection

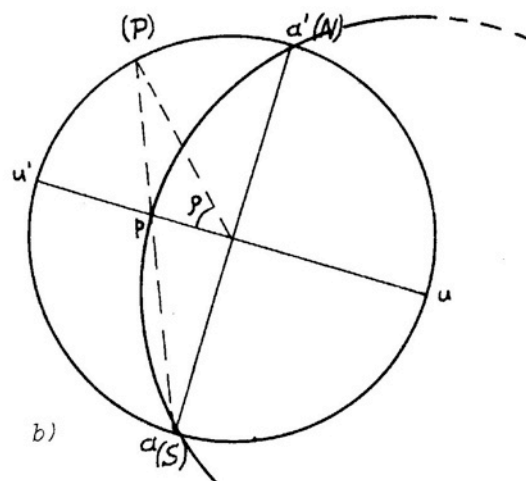
Projection d'un point P dont on connaît les coordonnées y et r .

Projection d'un grand cercle

C'est un problème qui se pose très souvent. Nous savons que la projection d'un cercle est un cercle. Il nous suffit donc de trouver la projection de trois points du grand cercle. Examinons la figure suivante : nous cherchons à construire la projection du grand cercle $aPa'P'$. Ce grand cercle coupe le plan de projection en a et a' qui sont déjà deux des trois points recherchés. Prenons le point P , hauteur maximum du grand cercle qui se trouve à l'intersection de celui-ci avec la normale à la droite aa' . Dans le plan de projection la trace de la droite PP' est uu' . Elle est normale à aa' . Un rabattement du plan uPu' autour de uu' amène P en (P) et S en (S) . On peut construire alors la projection p de P . Il ne reste plus qu'à construire le grand cercle qui passe par les points a , p et a' .



a) vue en perspective

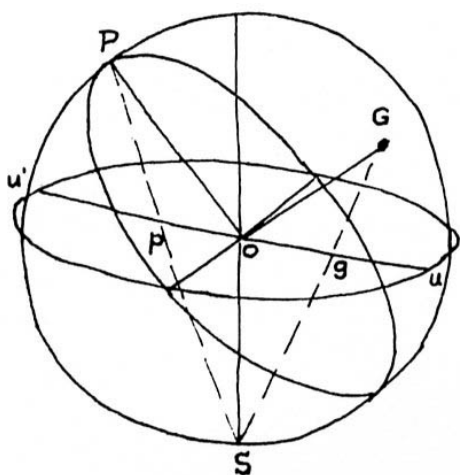


b) construction de la projection

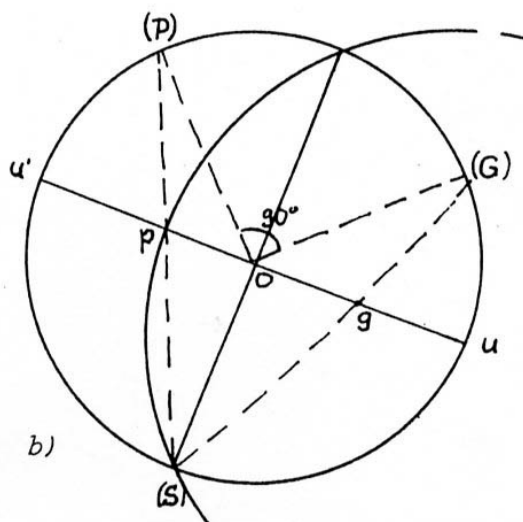
Projection d'un grand cercle d'inclinaison ρ .

Projection du pôle d'un grand cercle

Un grand cercle découpe dans la sphère un plan qu'on peut représenter par son pôle G , intersection avec la sphère de la normale au grand cercle passant par le centre de la sphère. On voit, sur le dessin suivant, comment on obtient la projection du pôle G . Dans le rabattement effectué autour de la droite uu' , on trace la normale à OP . On obtient le point (G) dont la projection g est celle du pôle du grand cercle.



vue en perspective



construction de la projection

Projection du pôle d'un grand cercle.

Il faut remarquer que la projection du pôle du grand cercle ne correspond pas au centre géométrique du cercle projeté !

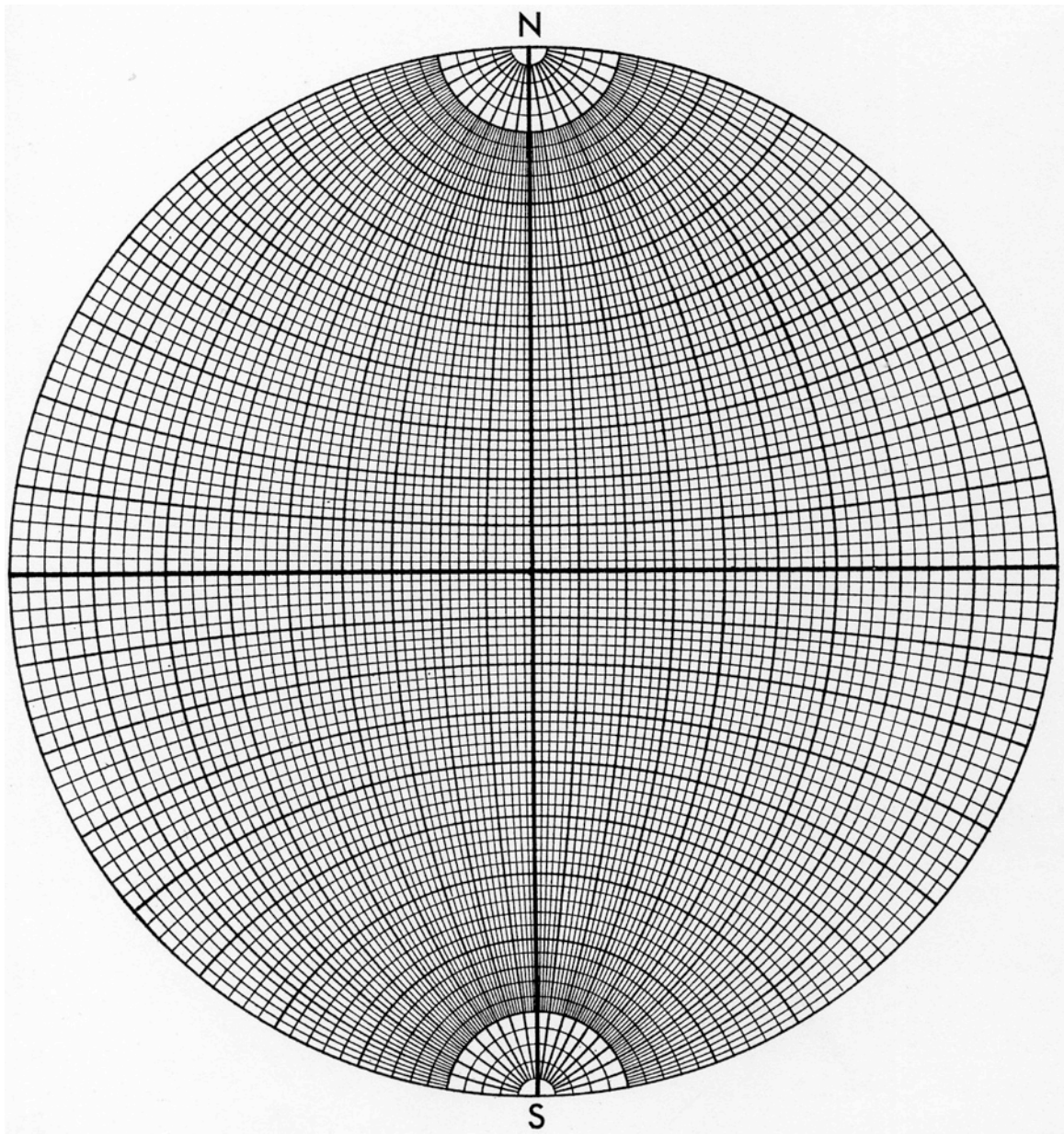
Les autres problèmes, tracés de petits cercles ou distances angulaires, ne sont guère plus compliqués, et les constructions qu'ils exigent sont toujours basées sur le principe du rabattement.

Pour faciliter les constructions, divers auteurs ont proposés des canevas dont le plus connu est celui de Wulff. Il consiste en une série de grands cercles nord-sud, construits de deux en deux degrés, recoupés par des petits cercles parallèles à l'équateur.

Le canevas de Wulff

Les constructions s'effectuent sur un papier calque sous lequel on a placé le canevas de Wulff. On place une punaise au centre du canevas, par-dessous, pointe en haut. La pointe traverse le papier calque qu'on peut faire tourner ainsi autour du centre de la construction. Ce canevas permet de mesurer immédiatement les distances angulaires à partir du centre de la projection

ou du cercle de base. Il permet encore de tracer n'importe quel grand cercle et de mesurer une distance angulaire entre deux points situés n'importe où sur la projection.



Canevas de Wulff.