

Umstülpungen – konkret und virtuell

Ellen Pawlowski
Wissenschaftliche Prüfungsarbeit
im Fach Mathematik

November 2008
TU Kaiserslautern

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Was ist Umstülpung?	6
2	Umstülpungsvarianten	7
2.1	Bewegliche Gelenkketten	7
2.1.1	Zwanglaufbedingungen	8
2.1.2	Theoretischer und tatsächlicher Zwanglauf	10
2.2	Umstülpung platonischer Körper	14
2.2.1	Sechsgliedrige Ringe in platonischen Körpern	14
2.2.2	Platonische Umstülpung	21
2.2.3	Ganzheitliche Umstülpung	35
3	Verwertbarkeit	45
3.1	Technische Nutzung	45
3.2	Künstlerische und pädagogische Aspekte	47
4	Visualisierung	49
4.1	Möglichkeiten und Grenzen	50
4.2	Der Würfel von Yoshimoto und Pfeiffer	50
4.3	Der Würfel von Konrad Schneider	53
5	Praktische Herstellung	57

5.1	Modellbau	57
5.2	Die Modelle	61
5.2.1	Der Würfel von Paul Schatz	61
5.2.2	Das Grenzfall-Oktaeder von Klaus Ernhofer	66
5.2.3	Das Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora	67
5.2.4	Der Cubus X von Hartmut Endlich	70
5.2.5	Der V Kubus von Fred Voß	73
6	Zusammenfassung und Ausblick	75

Kapitel 1

Einleitung

Seit Ende des 19. Jahrhunderts wurden in der Mathematik nicht nur die starren Körper betrachtet; bewegliche Verbindungen von Körpern rückten immer mehr in den Mittelpunkt mathematischer Untersuchungen. Man versuchte einerseits, starre Körper in ein bewegliches System miteinander verbundener Teilkörper zu zerlegen, und andererseits betrachtete man die Beweglichkeit von Polyederketten. Die Entdeckung des umstülpbaren Würfels durch Paul Schatz 1929 begründete eine Reihe von Entwicklungen, die verschiedenste umstülpbare Körper hervorgebracht haben.

Diese Arbeit befasst sich mit verschiedenen Ansätzen zur Konstruktion von Umstülpkörpern. Das Hauptaugenmerk liegt dabei in der Untersuchung verschiedener umstülpbarer Modelle der Platonischen Körper. Einen weiteren Schwerpunkt bildet die Darstellung solcher Körper in Form von realen und virtuellen Modellen.

In diesem Kapitel folgt zunächst eine kurze Begriffsklärung. Das zweite Kapitel erläutert die theoretischen Grundlagen für Umstülpkörper und stellt die bekanntesten Umstülpungsvarianten vor. Dabei werden sowohl die Konstruktionsprinzipien behandelt als auch Beispiele für die jeweiligen Varianten betrachtet. Im dritten Kapitel wird auf die Verwertbarkeit von Umstülpkörpern eingegangen; sowohl technische als auch pädagogische Anwendungen sind denkbar bzw. bereits umgesetzt.

Die letzten Kapitel beschäftigen sich schließlich mit der Darstellung von Umstülpkörpern. Das Kapitel Visualisierung beschreibt die Erstellung von Animationen zweier Umstülpkörper sowie die Möglichkeiten und Grenzen einer solchen Visualisierung. Im Kapitel Praktische Herstellung werden die im Rahmen dieser Arbeit gebauten Umstülpkörper-Modelle vorgestellt. Neben konkreten Hinweisen zur Herstellung werden auch grundlegende Informationen in Bezug auf Material und Werkzeug gegeben. Zum Abschluss folgt eine Zusammenfassung.

Die Arbeit soll einerseits einen Überblick über bestehende Ansätze bieten und diese einander gegenüber stellen. Zum anderen soll sie zum Nachbauen der Modelle und zum spielerischen, kreativen und forschenden Umgang mit umstülpbaren Platonischen Körpern anregen.



Abbildung 1.1: Verschiedene Umstülpkörper; (v.l.n.r.) hintere Reihe: Würfel von P. Schatz, Dodekaeder von W. Maas, Oktaeder von F. und I. Sykora; vordere Reihe: Oktaeder-Grenzfall von K. Ernhofer, Oktaeder und Würfel von H. Endlich, Würfel von F. Voß

1.1 Was ist Umstülpung?

Der Begriff Umstülpung beschreibt einen Prozess, der in der Natur weit verbreitet ist. Das wesentliche Merkmal eines solchen Prozesses ist die Vertauschung von innen und außen. Ein innerer Teil eines Körpers richtet sich nach außen, während ein zuvor nach außen gerichteter Teil sich nun ins Innere wendet. In der Natur kommen solche Prozesse insbesondere bei Entwicklungsvorgängen vor, beispielsweise bei der Bildung von Organen in der embryonalen Entwicklung (vgl. [1]).

Umstülpkörper im mathematischen Sinne greifen die wesentliche Idee solcher Prozesse auf. Es handelt sich ganz allgemein um ringförmige Systeme beweglich verbundener Polyeder, die in sich drehbar sind, so dass die zuvor der Ringinnenseite zugewandten Flächen nach außen zeigen und umgekehrt.

Solche Gelenksysteme lassen sich auch in Platonische Körper einbetten. Einige Autoren gehen sogar noch weiter und streben die völlige Umstülpung des Körpers in eine sogenannte Negativform an, die den ursprünglichen Körper als Hohlform enthält. Eine nähere Betrachtung dieser Objekte folgt im nächsten Kapitel.

Kapitel 2

Umstülpungsvarianten

Es gibt mehrere Ansätze zur Umstülpung Platonischer Körper. Ihre Gemeinsamkeit besteht darin, dass sie im Wesentlichen aus einem Ring beweglich miteinander verbundener Polyeder bestehen. Die Unterschiede bestehen in den Konstruktionsprinzipien und den Forderungen oder Voraussetzungen, die an das jeweilige Modell gestellt werden. Diese haben jedoch erheblichen Einfluss auf die Eigenschaften des späteren Umstülpkörpers.

Dieses Kapitel beginnt mit den Grundbausteinen solcher Körper, den beweglichen Gelenkketten. Auf der Grundlage der Arbeiten von K. Ernhofer [1] und R.Byrnes [2] werden deren Eigenschaften zusammengestellt und Bedingungen dafür gefunden, dass eine bestimmte Bewegungsfreiheit – der Zwanglauf – bei einem Modell vorhanden ist.

Die weiteren Abschnitte beschäftigen sich mit den verschiedenen Ansätzen zur Umstülpung Platonischer Körper. Die hier gewählte Systematik lehnt sich an die Aufteilung der Umstülpkörper nach der Art der Gelenkringe in der Arbeit von K. Ernhofer und W. Maas [1] an und wurde durch den Ansatz der Ganzheitlichen Umstülpung ergänzt. Bei den Betrachtungen zur Ganzheitlichen Umstülpung fließen mit den Umstülpkörpern von F. Voß auch neuere Entwicklungen ein.

2.1 Bewegliche Gelenkketten

Die Basis für Umstülpkörper bilden sogenannte Gelenkketten. Ernhofer definiert diese als „bewegliche Verbindungen von Körpern, die infolge ihrer dauernden Berührungen an bestimmten Stellen in ihren gegenseitigen Bewegungen beschränkt sind.“ (vgl. [1, S.15]). Die Glieder der hier betrachteten Ketten sind Polyeder. Je

zwei Polyeder berühren sich gegenseitig an einer Kante; diese bildet das Verbindungsgelenk. Man kann sich diese Kante als ein Scharniergelenk vorstellen, an dem die beiden verbundenen Polyeder hin- und herklappen. Die Gerade, auf der die Verbindungskante liegt, wird als Drehachse des Gelenks bezeichnet.

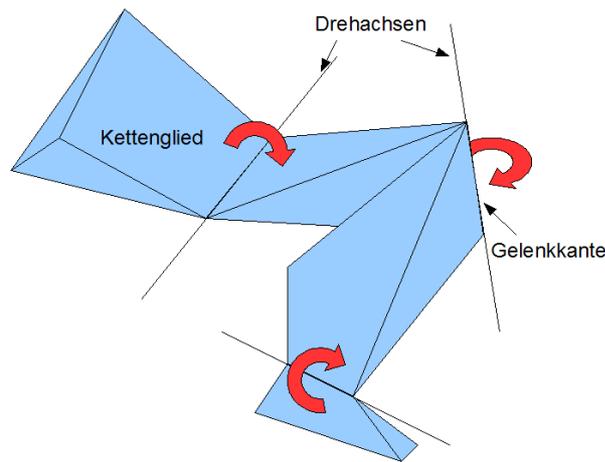


Abbildung 2.1: Gelenkkette aus vier Polyedern

Wird eine solche Kette von Polyedern zu einem Ring geschlossen, so wird dadurch die Beweglichkeit noch weiter eingeschränkt. Unter bestimmten Bedingungen lassen sich solche Ringe jedoch auch dann noch bewegen, wenn ein Glied fixiert wird. Im Folgenden werden die Kriterien für die Beweglichkeit genauer untersucht.

2.1.1 Zwanglaufbedingungen

Die Beweglichkeit eines Körpers lässt sich durch seinen Freiheitsgrad beschreiben. Ist ein Körper frei im Raum beweglich, so hat er den Freiheitsgrad $f = 6$, dies entspricht drei Translationen und drei Rotationen (jeweils entlang bzw. um eine der Koordinatenachsen, vgl. Abb. 2.2). Durch die Verkettung mit anderen Körpern wird ein Körper in seiner Beweglichkeit eingeschränkt, d.h. dessen Freiheitsgrad reduziert sich entsprechend der Art der Verbindung. Für die Berechnung des Freiheitsgrads eines räumlichen Gelenkrings mit n Gliedern und g Gelenken gibt Ernhofer in [1] folgende Formel an:

$$F = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i$$

Dabei bezeichnet f_i den Freiheitsgrad der einzelnen Körper abhängig von der Art der Gelenke. Da hier nur Gelenkringe mit Drehgelenken betrachtet werden, die genauso viele Gelenke wie Glieder besitzen, gilt $f_i = 1$ für alle i und die Formel vereinfacht sich zu der folgenden, bei Byrnes [2, S.11] angegebenen Formel:

$$F = n - 6$$

Siebengliedrige Ringe dieser Art haben eine Besonderheit: Ihr Freiheitsgrad beträgt 1, d.h. eine Bewegung an irgendeiner Stelle im Ring führt zu einer eindeutigen Bewegung des ganzen Rings. Diese Eigenschaft nennt man Zwanglauf.

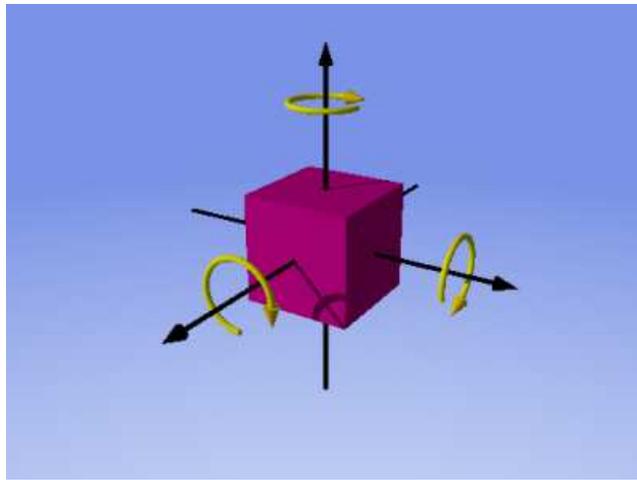


Abbildung 2.2: Sechs Freiheitsgrade: Drei Translationen, drei Rotationen

Der Freiheitsgrad eines sechsgliedrigen Rings beträgt 0, d.h. ein solcher Ring ist im Allgemeinen starr. Ernhofer und Byrnes geben jedoch verschiedene Bedingungen an, unter denen dennoch Zwanglauf möglich ist. Ernhofer stellt dabei zunächst keine Forderungen an die Form der Ringglieder, während Byrnes von Tetraederringen mit zueinander symmetrischen Gliedern ausgeht und auch größere Ringe mit mehr als sechs Gliedern betrachtet. Beide kommen zu den folgenden Ergebnissen (vgl. [1, S.19ff]):

Satz 1 *Gehören die sechs Drehachsen eines sechsgliedrigen Drehgelenkings einem Speziellen Linearen Strahlenkomplex an, so besitzt dieser Ring Zwanglauf.*

Ein Spezieller Linearer Strahlenkomplex ist die Gesamtheit aller Strahlenbündel, deren Träger T eine Gerade s durchläuft. Für den Beweis verweist Ernhofer auf Arbeiten von Bricard und Hunt, die sich als einige der Ersten mit solchen Gelenkringen befassten.

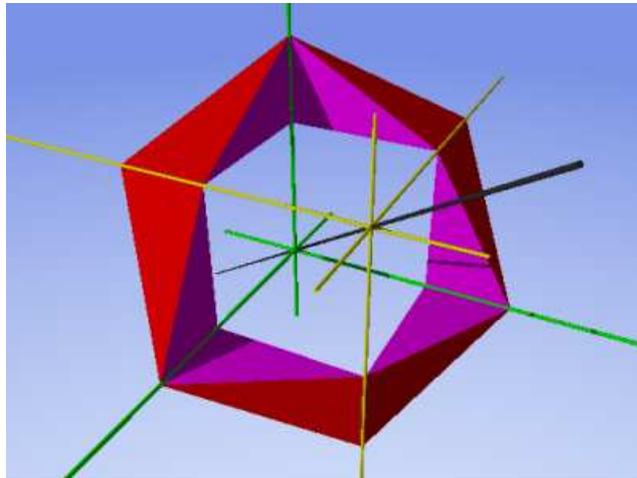


Abbildung 2.3: Gelenkring mit Drehachsen (gelb und grün); jeweils drei Drehachsen schneiden sich in einem Punkt, die Schnittpunkte liegen auf der Symmetrieachse (schwarz)

Ernhofer fordert, dass benachbarte Gelenke stets den gleichen Abstand zueinander haben sollen. Bei Byrnes ergibt sich die gleiche Voraussetzung wegen der Symmetrie der Glieder. Die Winkel ϕ_i zwischen zwei aufeinanderfolgenden Drehachsen sollen tripelweise gleich sein, also $\phi_1 = \phi_3 = \phi_5$ und $\phi_2 = \phi_4 = \phi_6$. Die dadurch eingeschränkten Gelenkringe sind zwangläufig und haben folgende Eigenschaften:

Satz 2 *Für symmetrische Gelenkringe gilt: In jeder Bewegungslage schneiden sich gegenüberliegende Drehachsen (vgl. Abb. 2.3). Ihre drei Verbindungsebenen sind jeweils Symmetrieebenen des Gelenkrings, die sich in einer gemeinsamen Achse s im Winkel von 60° schneiden.*

2.1.2 Theoretischer und tatsächlicher Zwanglauf

Nun muss man zwischen theoretischem und tatsächlichem Zwanglauf unterscheiden. Ein Ring, der die Sätze 1 und 2 erfüllt, besitzt theoretisch Zwanglauf; ein virtuelles Modell eines solchen Rings ließe sich frei bewegen. Ob ein reales Modell jedoch ebenfalls frei beweglich wäre, lässt sich erst anhand weiterer Betrachtungen feststellen.

Byrnes stellt in [2] ein Modell vor, dessen Beweglichkeit stark eingeschränkt ist, nämlich einen Ring aus sechs regelmäßigen Tetraedern (vgl. Abb. 2.4 - 2.6). Es erfüllt ohne Zweifel die Bedingungen der beiden Sätze aufgrund seiner Symmetrie –

jeweils drei Drehachsen schneiden sich in einem Punkt. Dennoch ist es nicht möglich, ein reales Modell dieses Rings frei zu drehen, denn in beiden Richtungen endet die Bewegung schnell in einer Sackgasse. Ein virtuelles Modell dieses Rings wäre frei beweglich, allerdings würden die Glieder des Rings sich dabei gegenseitig durchdringen.

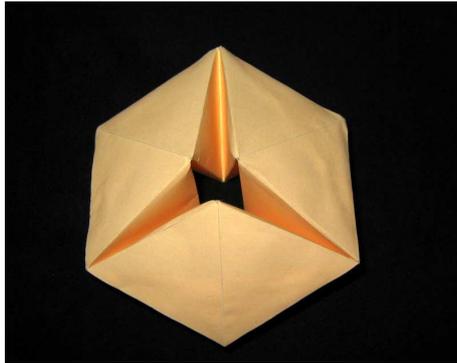


Abbildung 2.4: Sechsgliedriger Ring aus regelmäßigen Tetraedern

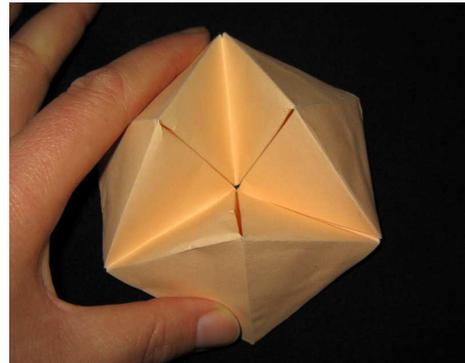


Abbildung 2.5: Der Ring lässt sich nicht frei drehen...

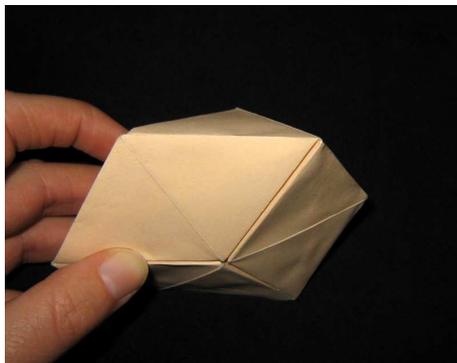


Abbildung 2.6: ... die Bewegung ist nach allen Seiten stark eingeschränkt.



Abbildung 2.7: Ein sechsgliedriges Kaleidozykel; dieser Ring ist frei drehbar.

Kürzt man bei diesem Ring die Gelenkkanten, indem man als Glieder Tetraeder mit kongruenten, gleichschenkligen Dreiecken verwendet, so verringert sich die Durchdringung und verschwindet bei einem bestimmten Verhältnis von Gelenkkantenlänge zum Abstand der Gelenkkanten ganz, so dass auch ein reales Modell wieder frei beweglich ist. Man kann nur dann von tatsächlichem Zwanglauf eines Gelenkrings sprechen, wenn sich auch ein reales Modell des Rings frei drehen lässt. Die Gelenkkanten des in Abb. 2.7 dargestellten Modells sind gerade so lang, dass keine

Durchdringung stattfindet; solche besonderen Tetraederringe werden als Kaleidocykel bezeichnet.

Um festzustellen, ob bei einem Gelenkring tatsächlicher Zwanglauf vorliegt, muss man also wissen, wie lang die Gelenkkanten maximal gewählt werden dürfen, so dass sich der Körper bei der Umstülpbewegung nicht selbst durchdringt. Ernhofer liefert zu dieser Fragestellung folgenden Satz:

Satz 3 *Gegeben sei ein symmetrischer Gelenkring mit sechs Gliedern. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Gelenkachsen betrage 1. Dann gilt folgende Beziehung zwischen dem Winkel ϕ zweier aufeinanderfolgender Drehachsen und der maximalen Länge λ der sechs Gelenkkanten:*

$$\lambda = \pm 2\sqrt{\cot^2(60^\circ) - \cot^2(\phi)}$$

Für reellwertiges λ muss gelten: $60^\circ \leq \lambda \leq 120^\circ$.

Beweis: Siehe [1, S.22ff]. Ernhofer betrachtet die Lage der Kantenendpunkte im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Länge der Gelenkkanten und leitet daraus Gleichungssysteme ab; nach deren Auflösung erhält er für die Kantenlänge obige Formel. Man beachte, dass die maximale Gelenkkantenlänge symmetrisch um den Achsenmittelpunkt liegt, also um den Punkt, der den minimalen Abstand zu den benachbarten Gelenkachsen hat.

Byrnes verallgemeinert diese Formel für symmetrische Ringe mit beliebiger, geradzahligem Gliederanzahl $2n$:

$$\lambda = \pm 2\sqrt{\cot^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right) - \cot^2(\phi)}$$

wobei $\frac{180^\circ}{n} \leq \lambda \leq 120^\circ$.

Beweis: Siehe [2, S.16]. Der Beweis ist elementarer als der von Ernhofer; Byrnes veranschaulicht zwar ebenfalls zunächst die Lage der Kantenendpunkte, argumentiert dann jedoch mit ähnlichen Dreiecken sowie dem Satz von Pythagoras und erhält zunächst die gleiche Formel wie Ernhofer. Die Verallgemeinerung auf größere Ringe erfolgt mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen. Man beachte allerdings, dass größere Ringe einen entsprechend höheren Freiheitsgrad haben und man dann nicht mehr von Zwanglauf sprechen kann. Die Formel sichert jedoch die freie Beweglichkeit solcher Ringe.

Die Länge der Gelenkkanten eines Rings kann also maximal so groß wie λ gewählt werden. Für kleinere Kanten erhält man Gelenkringe, die in der Mitte stets eine

Öffnung aufweisen, egal in welcher Position sie sich gerade befinden. Wählt man jedoch bei einem Tetraederring genau die maximale Kantenlänge, so erhält man ein Modell mit einer besonderen Eigenschaft: Sobald drei Gelenkachsen in einer Ebene liegen, schließt sich die Öffnung des Rings in der Mitte (siehe Abb. 2.8). Die drei komplanaren Gelenkachsen berühren sich im Mittelpunkt, während jeweils zwei der Tetraeder sich an einer Fläche berühren. Die Bewegung der Ringglieder entlang der „äußeren“ Gelenkachsen, d.h. derjenigen, die sich nicht in der Mitte berühren, erreicht dann also ein Maximum. Während eines vollständigen Umstülpzyklus kommt diese Situation viermal vor - für jedes Gelenkachsentrupel zweimal.

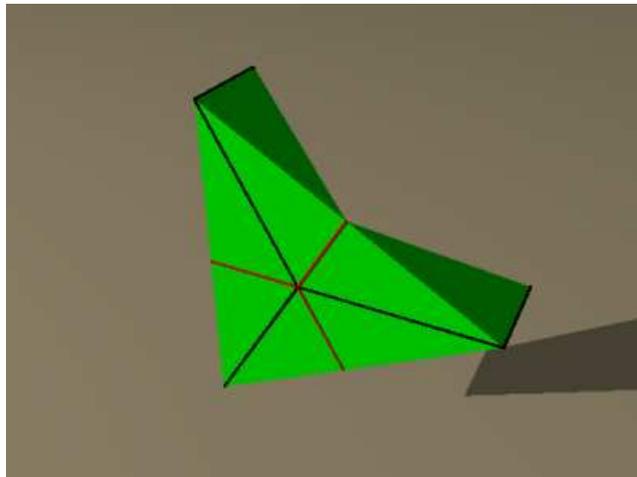


Abbildung 2.8: Ebenendurchgang eines sechsgliedrigen Gelenkrings: drei Gelenkachsen liegen in einer Ebene (rot)

Für die Form der Kettenglieder leitet Ernhofer aus diesen Beobachtungen folgendes ab: Die Glieder eines Rings müssen in den (im Allgemeinen schiefen) Tetraedern enthalten sein, die durch die maximalen Gelenkachsen festgelegt werden. Weitere Einschränkungen hinsichtlich der Form sind zur Erzielung des Zwanglaufs bzw. der freien Beweglichkeit des Rings nicht nötig (vgl. [1, S.25]).

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Varianten der Umstülpung Platonischer Körper vorgestellt. Dabei geht es im Wesentlichen darum, sechs- oder mehrgliedrige Ringe in Platonische Körper einzubetten. Die hier behandelten Sätze liefern dazu die theoretischen Grundlagen.

2.2 Umstülpung platonischer Körper

Zur Umstülpung Platonischer Körper existieren verschiedene Ansätze. Der 1929 entdeckte Würfel von Paul Schatz lieferte den Ansatzpunkt für unterschiedliche Entwicklungsrichtungen. Mitte der Siebziger Jahre begann Immo Sykora, nach Lösungen für die übrigen Körper zu suchen; seine Überlegungen veranlassten sowohl seinen Sohn Friedemann und seinen Bruder Franz als auch Wolfgang Maas und später Robert Byrnes, sich mit der Umstülpung Platonischer Körper zu befassen.

Ab 1985 beschäftigte sich auch Klaus Ernhofner mit diesem Gebiet. Im Gegensatz zum Ansatz von Familie Sykora, deren Hauptaugenmerk auf der Darstellung des geometrischen Körpers auch während der Umstülpung lag, ging es ihm um die Übertragung der Sechsgliedrigkeit und somit des Zwanglaufs auf die anderen Platonischen Körper.

Eine dritte Art der Umstülpung wurde durch den Bildhauer Naoki Yoshimoto und den Arzt Hartmut Endlich bekannt. Dabei werden die Körper in kongruente Teile aufgegliedert. Der wesentliche Unterschied zu den anderen Ansätzen ist der Umstand, dass bei dieser Art der Umstülpung der Platonische Körper vollständig durch den Gelenkring ausgefüllt wird, während bei Ernhofner und Sykora ein oder mehrere sogenannte Riegelkörper entnommen werden müssen. Die folgenden Abschnitte stellen die einzelnen Ansätze jeweils anhand der grundlegenden Idee und einiger Beispiele vor.

2.2.1 Sechsgliedrige Ringe in platonischen Körpern

Der Würfel von Paul Schatz als der erste Umstülpkörper gehört zu den Umstülpkörpern mit Zwanglauf. Klaus Ernhofner übertrug das Konstruktionsprinzip auf die übrigen Platonischen Körper. Um den Bezug zum Platonischen Körper aufrecht zu erhalten, forderte er, dass der Gelenkring zumindest Teile der Körperoberfläche enthält; es reicht also nicht aus, einfach einen beliebigen Gelenkring in einen Platonischen Körper einzubeschreiben. Man muss sich also überlegen, was man mindestens aus einem Platonischen Körper entfernen muss, damit der verbliebene Teil Zwanglauf besitzt und noch dazu Teil der Oberfläche des Körpers ist. Dazu verwendet er die Sätze aus Abschnitt 2.1.1: Um die in Satz 2 geforderte Symmetrie sicherzustellen, sucht er in den Platonischen Körpern nach dreizähligen Symmetrieachsen, welche als Mittelachse des Gelenkrings dienen. Als mögliche Gelenkachsen dienen die Schnittstrecken der drei zugehörigen Symmetrieebenen mit der Oberfläche des Platonischen Körpers; diese sind entweder Kanten oder Flächenhalbierende.

Damit schneiden sich gegenüberliegende Drehachsen (da sie ja in derselben Symmetrieebene liegen) und Satz 2 ist erfüllt.

Man wählt nun aus je zwei benachbarten Symmetrieebenen zwei Schnittstrecken als Gelenkachsen aus und prüft anhand des Winkels, ob ein Umstülpkörper herstellbar ist. Auf diese Weise lässt sich für jeden Platonischen Körper ein Umstülpkörper finden - meist mehrere, im Fall des Ikosaeders erhält man sogar vier verschiedene. In [1] werden sämtliche so konstruierten Körper detailliert dargestellt; zwei dieser Körper werden als Beispiel herangezogen.

Der Würfel

In diesem Abschnitt wird sich zeigen, dass der Würfel von Paul Schatz tatsächlich die einzige Möglichkeit darstellt, einen Umstülpkörper mit Zwanglauf aus dem Würfel herzustellen.

Die dreizählige Symmetrieachse des Würfels verläuft durch zwei gegenüberliegende Ecken des Würfels. Diese Achse bildet die Mittelachse des Gelenkrings. Die Schnittstrecken der zugehörigen Symmetrieachsen liegen dann entweder auf einer Würfelkante oder auf einer Flächendiagonale (siehe Abb. 2.9). Die Strecken AB und BD sowie die Strecken AC und CD liegen jeweils auf einer gemeinsamen Symmetrieebene. Die übrigen Schnittkanten müssen aus Symmetriegründen nicht betrachtet werden. Es bleiben vier Paare als mögliche Gelenkachsen übrig, die nun hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage untersucht werden müssen.

Die Kombinationen $AB \times AC$ und $BD \times CD$ entfallen nach Satz 3, da der Winkel zwischen den Strecken kleiner als 60° ist. Der Winkel zwischen AB und CD beträgt 90° ; diese Kombination führt zum Würfel von Paul Schatz. Das letzte mögliche Paar, $AC \times BD$, schließt einen Winkel von genau 60° ein und stellt einen Grenzfall dar: Für einen Gelenkring mit diesem Paar als benachbarten Drehachsen könnte man nur dann auch tatsächlichen Zwanglauf erzielen, wenn die Gelenkkantenlänge $\lambda = 0$ beträgt, was praktisch nicht machbar ist. Der Würfel von Paul Schatz verbleibt somit als einzige Möglichkeit. Die noch fehlenden vier Gelenkachsen erhält man durch Drehung der Strecken AB und CD um 120° bzw. 240° um die Symmetrieachse.

Wie man sich leicht verdeutlichen kann, trifft auch Satz 2 auf einen Ring mit diesen Drehachsen zu: Jeweils drei Drehachsen schneiden sich in einem Punkt, nämlich in je einem der beiden Eckpunkte, durch welche die Symmetrieachse verläuft; diese ist zugleich die Achse des Speziellen Linearen Strahlenkomplexes. Damit ist aus theoretischer Sicht gesichert, dass der entstehende Gelenkring die Eigenschaft Zwang-

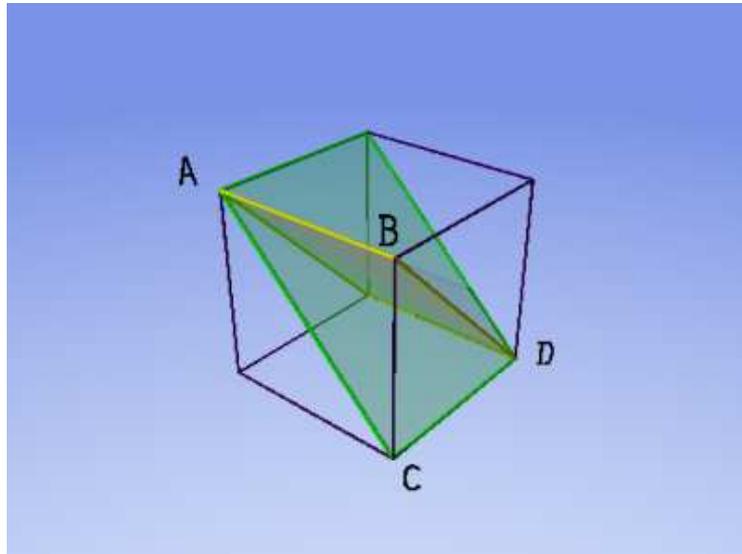


Abbildung 2.9: Würfel mit zwei Symmetrieebenen (gelb und grün) und den entsprechenden Schnittstrecken mit der Oberfläche (vgl. [1, S.29])

lauf besitzt. Wie lassen sich aber nun die konkreten Abmessungen der Ringglieder bestimmen?

Hierzu muss zunächst die maximale Gelenkkantenlänge bestimmt werden; dies erfolgt mit Hilfe der Formel aus Satz 3 :

$$\lambda = 2\sqrt{\cot^2(60^\circ) - \cot^2(90^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Dabei muss man beachten, dass die „Mitte“ der maximalen Gelenkkantenlänge durch die Abstände der Drehachsen bestimmt ist. Da die Abstände beim Würfel auf den Würfelkanten liegen, entfällt somit eine Hälfte der theoretisch möglichen Gelenkkante und man erhält für die maximal im Würfel mögliche Kantenlänge:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Die übrigen Strecken und Winkel können leicht mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden. Damit ergibt sich ein Umstülpkörper, der aus zwei sogenannten Riegelkörpern und einem dazwischenliegenden Umstülp Gürtel besteht. Die beiden Riegelkörper sind gleich; der Grund dafür ist der Winkel von 90° zwischen benachbarten Gelenkachsen, welcher bewirkt, dass der Gelenkring neben der Drehsymmetrie um die Mittelachse noch eine zusätzliche Symmetrie besitzt: Wählt man die durch den Würfelmittelpunkt verlaufende Normale einer der drei Symmetrieebenen

als Achse, so geht der Ring bei einer Drehung um 180° in sich über. Von allen Umstülpkörpern mit Zwanglauf ist der Würfel von Paul Schatz der einzige mit dieser Eigenschaft.

Die Abbildung 2.10 zeigt die Form der Riegelkörper; die beiden Riegel berühren sich an jeweils drei Flächen, die sich alle im Würfelmittelpunkt treffen (siehe auch Modell 5.2.1). Zweimal während der Umstülpung schließt sich das Loch in der Mitte des Umstülpgürtels, wenn sich ein Gelenkachsentripel in der Mitte berührt. In diesem Moment liegen die Flächen, die durch dieses Gelenkachsentripel miteinander verbunden werden, flach in einer Ebene. Dies geschieht ein weiteres Mal, wenn die Gelenkachsen zum zweiten Mal in einer Ebene liegen; das Loch im Ring nimmt dann die Form eines gleichseitigen Dreiecks an. Abbildung 2.11 zeigt den Gürtel während der Umstülpung.

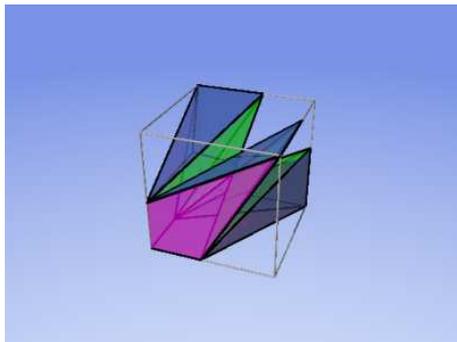


Abbildung 2.10: Einer der beiden Riegelkörper des Würfels von Paul Schatz

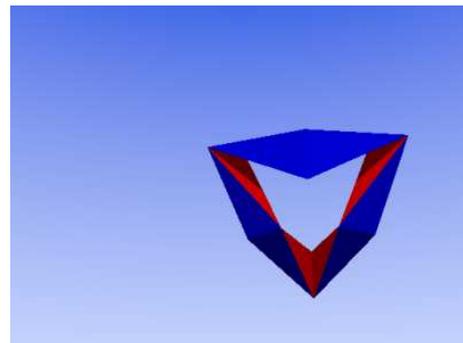


Abbildung 2.11: Der Gelenkring des Würfels von Paul Schatz während der Umstülpung

Der Würfel von Paul Schatz hat noch weitere besondere Eigenschaften. So nimmt zum Beispiel der Gürtel genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtvolumens ein; der Gürtel hat also das gleiche Volumen wie einer der Riegelkörper. Darüber hinaus bleibt der Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Eckpunkten des Gürtels - also die Raumdiagonale des Würfels - während der gesamten Umstülpbewegung konstant. Fixiert man nun ein zwischen diesen beiden Eckpunkten liegendes Glied des Gürtels und betrachtet die Bewegung dieser konstanten Strecke, so ergibt sich ein Körper, der durch eine abwickelbare Fläche berenzt ist: das Oloid. Auf diesen besonderen Körper wird in Kapitel 3 eingegangen. Eine detaillierte Betrachtung dieses Würfels ist auch in [4] zu finden.

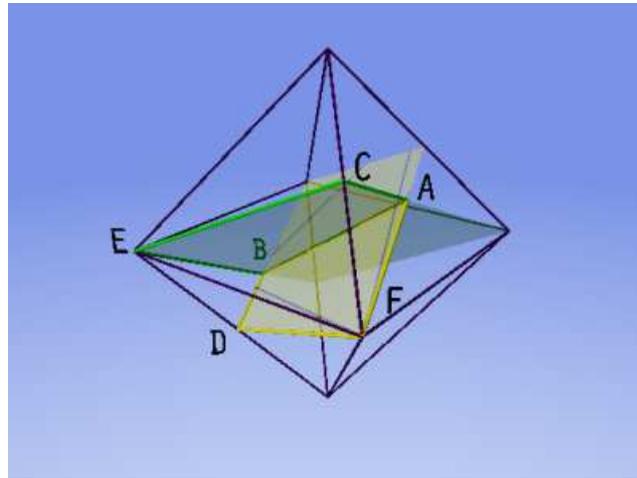


Abbildung 2.12: Oktaeder mit zwei Symmetrieebenen (grün und gelb) sowie den entsprechenden Schnittstrecken mit der Oberfläche (vgl. [1, S.58])

Das Oktaeder

Das Oktaeder ist der zum Würfel duale Körper; es besitzt genausoviele Kanten (12) wie der Würfel, während die Anzahl der Flächen beim Oktaeder (8) der Eckenanzahl beim Würfel und die Anzahl der Ecken (6) der Flächenanzahl beim Würfel entspricht (Genaueres zur Dualität in Abschnitt 2.2.2 sowie in [3, S.10ff]). Während die dreizählige Symmetrieachse des Würfels durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte verläuft, ist die dreizählige Symmetrieachse des Oktaeders daher die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen.

Kombination	ϕ	Ergebnis
AC x AF	60°	kein Umstülpkörper möglich
AC x FD	$80,4^\circ$	Oktaeder I
AC x DB	60°	kein Umstülpkörper möglich
CE x AF	$80,4^\circ$	Oktaeder II
CE x FD	$<60^\circ$	kein Umstülpkörper möglich
CE x DB	$80,4^\circ$	Oktaeder I (wie bei AC x FD)
EB x AF	60°	kein Umstülpkörper möglich (wie bei AC x DB)
EB x FD	$80,4^\circ$	Oktaeder II (wie bei CE x AF)
EB x DB	60°	kein Umstülpkörper möglich (wie bei AC x AF)

Es gibt gemäß den Ergebnissen aus der obigen Tabelle (vgl.[1, S.58]) also zwei Möglichkeiten, einen zwangsläufigen Umstülpkörper aus dem Oktaeder herzustellen. In beiden Fällen enthält der Platonische Körper mehrere identisch aussehende Ringe. Deren Anordnung im Körper geht nicht direkt aus den Konstruktionsprinzipien von Ernhofer hervor, sondern vielmehr aus dem Versuch, so viele Ringe wie möglich im Körper unterzubringen, ohne dass diese sich gegenseitig durchdringen.

Das Oktaeder I Der Körper besteht aus zwei außen liegenden, identisch gebauten Ringen und einem dazwischenliegenden Riegelkörper. Hier lässt sich wieder eine duale Beziehung zum Würfel erkennen, der aus zwei außen liegenden, gleich geformten Riegeln und einem dazwischenliegenden Gürtel besteht. Die Abbildungen 2.13 und 2.14 aus [1, S.60f] zeigen die Ringe und den Riegelkörper sowie einen der Ringe während der Umstülpung.

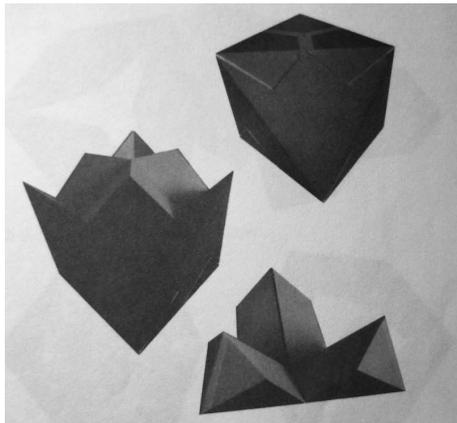


Abbildung 2.13: Das Oktaeder I von Klaus Ernhofer

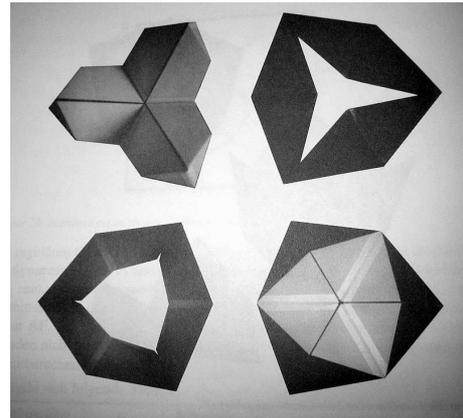


Abbildung 2.14: Einer der Gelenkringe während der Umstülpung

Das Oktaeder II Die zweite Variante des zwangsläufigen Oktaeders hat sogar vier Ringe, die auf vier jeweils nicht benachbarten Flächen des Oktaeders liegen. Der Riegelkörper liegt in der Mitte und nimmt den bei weitem größten Teil des Volumens ein. Die so entstandenen Gelenkringe haben sehr flache Glieder. Dadurch entstehen bei der Umstülpbewegung spitze Dreisterne sowie hexagonale Ringe mit einer weiten Öffnung in der Mitte (siehe Abbildungen 2.15 und 2.16).

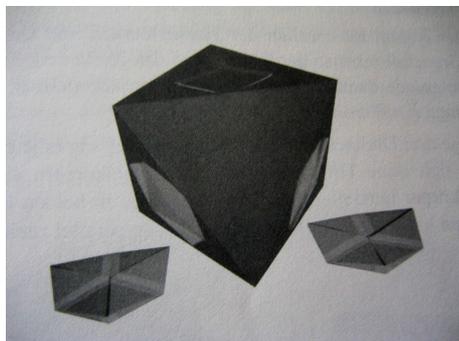


Abbildung 2.15: Das Oktaeder II von Klaus Ernhof

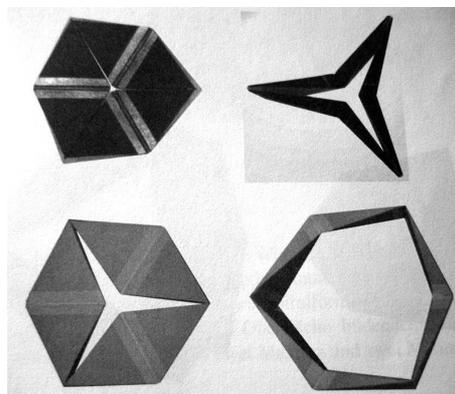


Abbildung 2.16: Einer der Gelenkringe während der Umstülpung

Der Grenzfall

In der Tabelle sieht man einige Kombinationen, für die der Winkel 60° beträgt. Setzt man diesen Winkel in die Formel von Satz 3 ein, so erhält man - wie schon beim Würfel - eine maximale Gelenkkantenlänge von $\lambda = 0$. Es ist also praktisch nicht möglich, ein voll bewegliches Modell mit tatsächlichem Zwangslauf zu bauen, da sich ein so konstruierter Gelenkring bei der Umstülpung selbst durchdringt. Versucht man es dennoch, so erhält man einen Gelenkring mit einer zwangsläufigen, jedoch stark eingeschränkten Beweglichkeit (vgl. Modell 5.2.2).



Abbildung 2.17: Das Grenzfall-Oktaeder in Grundstellung



Abbildung 2.18: Stülpbewegung in eine Richtung...

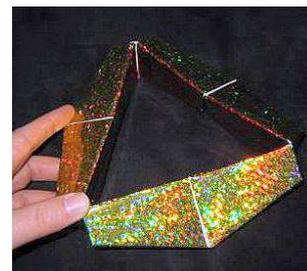


Abbildung 2.19: ...bis zur gegenseitigen Blockade der Glieder

Der Gelenkring nimmt dabei das ganze Volumen des Körpers ein, es müssen keine Riegelkörper entfernt werden. Die Drehachsen des Rings liegen zu Beginn in zwei zueinander parallelen Ebenen, nämlich in den beiden gegenüberliegenden Flächen, durch welche die Symmetrieachse verläuft. Der Ring lässt sich in zwei Richtungen

bewegen, aber nur so weit, bis jeweils drei der Gelenkachsen parallel zueinander liegen - dann blockieren sich die Ringglieder gegenseitig. Auch eine Wegnahme von Riegelkörpern kann diese Blockade nur hinauszögern; aufgrund der „zu langen“ Gelenkkanten muss der Ring früher oder später blockieren.

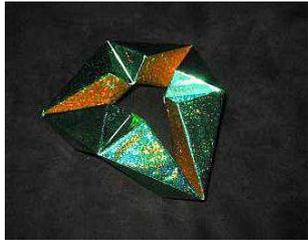


Abbildung 2.20: Stülpbewegung in die andere Richtung...



Abbildung 2.21: ...bis sich die Glieder blockieren



Abbildung 2.22: Seitenansicht mit Blick auf die Innenflächen

Nach Ernhofer ist „die ideelle Umstülpbewegung [...] aber kontinuierlich denkbar (und mittels einer Computeranimation darstellbar), auch wenn der Winkel ϕ nicht zwischen 60° und 120° liegt“ (vgl. [1, S.63]). Die Abbildungen 2.17 - 2.22 zeigen den Gelenkring in verschiedenen Positionen.

2.2.2 Platonische Umstülpung

Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht bei der Platonischen Umstülpung der geometrische Körper als Idee. Der gesamte Körper soll die Umstülpbewegung mitvollziehen, wobei gewisse wesentliche Eigenschaften erhalten bleiben sollen. Angeregt durch den umstülpbaren Würfel von Paul Schatz, begann die Familie Sykora 1973, nach Lösungen für die Platonischen Körper zu suchen, die eine ähnlich zyklische Bewegung zulassen, in ihrer Konstruktion jedoch den Eigenheiten des jeweiligen Platonischen Körpers folgen sollten. Damit kam die Sechsgliedrigkeit, wie sie bei Ernhofer im Mittelpunkt steht, nicht mehr in Frage (vgl.[5, S.11]).

Vielmehr sollte der Körper durch seine Symmetrieebenen in lauter gleichartige Teile zerlegt werden. Da sich bei einer Umstülpung immer eine Seite des Körpers in sich zusammenzieht und die andere sich ausdehnt, ist ein materielles Fortbestehen des gesamten Körpers nicht realisierbar; es müssen daher immer noch Riegelkörper entnommen werden. Der wesentliche Unterschied zu den Konstruktionen von Ernhofer liegt allerdings in der Forderung, dass aus dem verbleibenden Gürtel der Platonische Körper „in gesetzmäßiger Eindeutigkeit“ ergänzbar sein soll (vgl. [1, S.80]).

Die Zentralsymmetrie, die jedem Platonischen Körper zu eigen ist, kann bei der Umstülpbewegung nicht erhalten bleiben; an ihre Stelle tritt die Symmetrie um die Mittelachse des Gelenkrings. Entlang dieser Achse bewegen sich die beiden Pole der Umstülpung. In Abbildung 2.3 sind die Pole die Schnittpunkte der gelben bzw. grünen Drehachsen. Der sogenannte Involutionsspol bezeichnet die Seite des Körpers, die sich nach innen zusammenzieht, während der Evolutionspol sich nach außen ausdehnt, die Unendlichkeit durchschreitet und auf der anderen Seite schließlich zurückkehrt, um die Rolle des Involutionsspols zu übernehmen. An den beiden Polen werden die Riegelkörper entnommen.

Man spricht von Eckenpolen, wenn die Symmetrieachse des Umstülpgürtels durch zwei gegenüberliegende Ecken des Körpers verläuft, und entsprechend von Flächen- bzw. Kantenpolen, wenn diese Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen bzw. Kanten geht. Der Gelenkring selbst wird bei der Platonischen Umstülpung als „Gürtel“ bezeichnet, was auf die äquatoriale Lage des Rings zwischen den beiden Polen hinweist. Die Riegel an den beiden Polen sind stets kongruent, können aber zueinander spiegelsymmetrisch sein (z.B. beim Tetraeder). Im folgenden Abschnitt werden die Forderungen an die Platonische Umstülpung sowie deren Konstruktionsprinzipien und Besonderheiten erläutert.

Forderungen an die Platonische Umstülpung

Immo Sykora und Wolfgang Maas stellen in [5] die nachfolgenden Merkmale einer Platonischen Umstülpung vor. Es sei jedoch im Voraus bemerkt, dass nicht alle Umstülpkörper sämtliche Forderungen erfüllen; lediglich die von Familie Sykora konstruierten Modelle von Tetraeder und Oktaeder zeigen alle diese Eigenschaften. Alle weiteren Modelle bezeichnen die Autoren als „sinnvolle und interessante Varianten des Themas Umstülpung“ (vgl. [5, S.14]).

Identität (Entsprechen der Idee) Der Bezug zum Platonischen Körper soll während der Umstülpung erhalten bleiben; das bedeutet insbesondere, dass die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen und deren gegenseitige Beziehung bestehen bleiben. Dies steht zunächst scheinbar im Widerspruch zur Entnahme von Riegelkörpern.

Konstruierbarkeit (Technik) Das Modell soll auch tatsächlich umstülpbar sein. Aus dem Gelenkring müssen alle Elemente der „ideellen Form“ (d.h. des als vervollständigt vorgestellten Körpers) in jeder Umstülpphase eindeutig abgeleitet werden können. Damit die Flächen während der Umstülpung als solche erhalten bleiben und nicht in mehrere Ebenen aufgespalten werden, kommen als Gelenkachsen

nur Flächenmitten-Symmetrieachsen und Kanten in Frage. Insbesondere letztere sind notwendig, damit die Flächenneigungswinkel sich verändern können. Durch die Flächenmitten-Symmetrieachsen wird der Bezug sowohl zum Mittelpunkt des Körpers als auch zum dualen Platonischen Körper hergestellt. Sämtliche Eckpunkte sind beweglich und ergeben sich als Schnittpunkte von Kanten- und Gelenkachsen in immer gleichem Richtungssinn.

Umstülpphasen Folgende Phasen und Erscheinungen ergeben sich aus den Konstruktionsprinzipien:

1. Urform. Ergänzt durch seine beiden Riegelkörper bildet der Gelenkring den vollständigen Platonischen Körper. Alle Teile berühren sich im Mittelpunkt des Körpers.
2. Unendlichkeitsdurchgang der einen Körperhälfte. Ein Teil der Form durchwandert die Unendlichkeit und ist in dieser Phase nicht im Endlichen sichtbar. Dieser Teil kehrt anschließend „von der anderen Seite“ wieder zurück. Von diesem Moment an muss man sich den ideellen Körper als unendlich groß vorstellen.
3. Vollständiger Ebenendurchgang, d.h. die ganze Oberfläche liegt in einer Ebene. Alle Flächenneigungswinkel betragen 180° . Diese Phase ist ein entarteter Zustand; in diesem Moment vollzieht sich der Austausch von innen und außen; nichts liegt in diesem Moment innen, nichts liegt außen. Manche Flächen sind zu einem Punkt entartet.
4. Zweiter Unendlichkeitsdurchgang der gleichen Körperhälfte. Erst nach diesem Durchgang hat der Körper wieder eine endliche Oberfläche.
5. Vollständig umschlossene Negativ- oder Hüllform als umgestülpte Urform. Alle Flächenneigungswinkel sind größer als 180° . Im Inneren der Negativform befindet sich ein Hohlraum, der exakt der Urform entspricht. Alle ursprünglichen Außenflächen zeigen nach innen.
6. Unendlichkeitsdurchgang der anderen Körperhälfte
7. Vollständiger Ebenendurchgang
8. Zweiter Unendlichkeitsdurchgang der zweiten Körperhälfte
9. Urform (wie 1.)

Polarität Die Gliederung des Modells durch die Symmetrieebenen spiegelt die Beziehung zwischen zwei zueinander dualen (polaren) Platonischen Körpern wider, da die Symmetrieebenen eines Körpers denen des dualen Körpers entsprechen. Die Negativform (die fünfte Umstülpphase) hat im Inneren einen Hohlraum, der genau der Urform entspricht. Alle Segmente zeigen nun mit ihrer ursprünglichen Außenfläche nach innen, während die Flächenmitten-Gelenkachsen nach außen zeigen. Verbindet man ihre Spitzen miteinander, so erhält man den dualen Platonischen Körper zur Urform. Der vervollständigte Gürtel in der Negativform weist eine räumliche Sternform auf; die Flächen des ursprünglichen Körpers werden zu Spitzen, die Ecken und Kanten zu Vertiefungen.

Der Würfel von Konrad Schneider (siehe auch Abschnitt 4.3) verhalf der Familie Sykora zur Entscheidung über die Konstruktionsprinzipien, nach denen die weiteren Modelle entstanden. Bemerkenswert dabei ist, dass der Würfel von Konrad Schneider selbst nicht alle Forderungen erfüllt - er weist zum Beispiel keine Unendlichkeitsdurchgänge auf. Die genaue Konstruktion eines Platonischen Umstülpkörpers wird im Anschluss an diesen Abschnitt am Beispiel des Oktaeders von Friedemann und Immo Sykora genauer dargestellt.

Konstruktion der Platonischen Umstülpkörper

Das Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora zeigt die vollkommene Form der Platonischen Umstülpung. Alle im vorherigen Abschnitt genannten Phasen werden durchlaufen und sind sehr gut zu beobachten. Im Abschnitt „Beispiele für Platonische Umstülpkörper“ sind Bilder und genauere Beschreibungen der einzelnen Phasen zu sehen. Hier soll es zunächst um die Konstruktion des Umstülpkörpers gehen.

Zunächst erfolgt gemäß den Forderungen von Maas und Sykora eine Untergliederung des Körpers durch alle seine Symmetrieebenen. Auf diese Weise entstehen lauter gleich große und gleich geformte Segmente, die sich alle gegenseitig im Mittelpunkt des Körpers berühren. Diese werden nun entsprechend den Forderungen zu Gürtelsegmenten und Riegelkörpern zusammengefasst.

Da beim Oktaeder von Sykora Flächenpole vorliegen (vgl. [1, S.101]), werden alle Segmente, die zu diesen Flächen gehören, als Teile der Riegelkörper betrachtet (dunkelgraue Teile in Abb.2.23). Sie müssen bei der Bildung des Gürtels nicht mehr berücksichtigt werden. Anschließend wird der Gürtel entsprechend den Forderungen konstruiert.

Als Gelenkverbindungen kommen demnach nur Kanten und die Flächenmitten-Symmetrieachsen in Frage. Segmente, die nebeneinander entlang einer Kante lie-

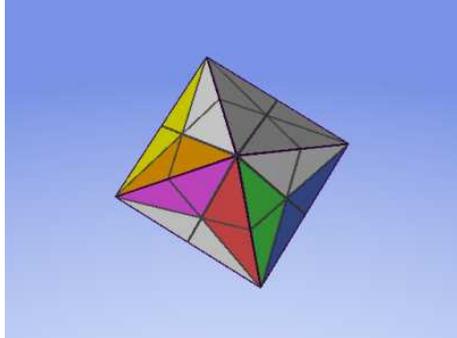


Abbildung 2.23: Unterteilung des Oktaeders; die grauen Teile werden zu den Riegeln und die gleichfarbigen Teile zu jeweils einem Gürtelsegment zusammengefasst

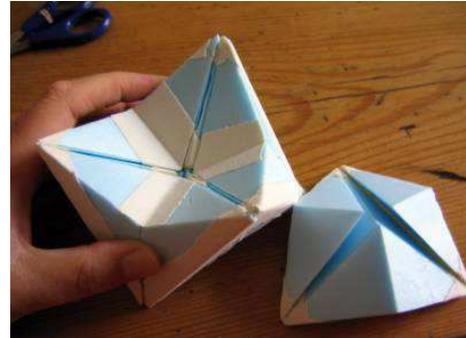


Abbildung 2.24: Das Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora mit einem herausgenommenen Riegel

gen, sich aber nicht an dieser Kante berühren, werden zusammengefasst (gleichfarbige Teile in Abb.2.23). Nun berühren sich jeweils drei Segmente im Mittelpunkt jeder verbleibenden Fläche. Von diesen drei Segmenten einer Fläche können nur jeweils zwei zum Gürtel gehören, da der Ring sonst nicht beweglich wäre. Daher werden die Segmente, die mit einer Kante an die bisherigen Riegel angrenzen, ebenfalls zu diesen hinzugefügt (hellgraue Teile in Abb.2.23).

Es verbleiben zwölf Segmente, die noch verbunden werden müssen. Dies geschieht zum einen entlang der Flächenmitten-Symmetrieachsen, wobei die Verbindungsstrecken der Flächenmitten mit dem Mittelpunkt des Körpers die Gelenkkanten bilden. Da die Flächenneigungswinkel veränderlich sein müssen, um in die Negativform gelangen zu können, müssen zusätzlich alle am Gürtel vorhandenen Kanten entweder als Gelenkkanten dienen oder ohne Verbindung bleiben (vgl. [1, S.89]). Im Fall des Oktaeders von Sykora werden alle diese Kanten als Gelenkverbindungen benötigt. So entsteht ein geschlossener Gürtel, der mäanderförmig zwischen den beiden Riegeln liegt. Auch ohne die Riegel lässt sich der Körper leicht in der Vorstellung vervollständigen – die Eckpunkte der Polflächen sind durch die Schnittpunkte der Kantengelenkachsen gegeben. Die Riegel sind in Form und Größe identisch. Sie liegen sich gegenüber und sind zueinander verdreht angeordnet (siehe auch Abbildung 2.29).

Die Umstülpbewegung

Die auf diese Weise konstruierten Gelenkringe bzw. Umstülpgürtel haben mehr als sieben Glieder. Nach Abschnitt 2.1.1 beträgt ihr Freiheitsgrad mindestens 2. Maas und Sykora schränken die Bewegung durch weitere Forderungen auf eine eindeutige, möglichst dem Ideal entsprechende Bewegung ein [1, S.92].

Die wesentliche Einschränkung ist dabei die Forderung nach Symmetrie um die Umstülpachse (d.h. die Achse, auf der die beiden Pole liegen). Da jedoch auch symmetrische Figuren gebildet werden können, die nicht dem Ideal der Umstülpbewegung entsprechen (vgl. Abbildung 2.25), müssen weitere Bedingungen an die Bewegung gestellt werden. Daher wird zusätzlich gefordert, dass die Mittelgelenke der Flächen auf der Evolutionsseite starr bleiben (vgl. Abb. 2.26). Zwei durch ein solches Mittelgelenk verbundene Segmente können also während der Evolutionsbewegung als ein Segment behandelt werden.

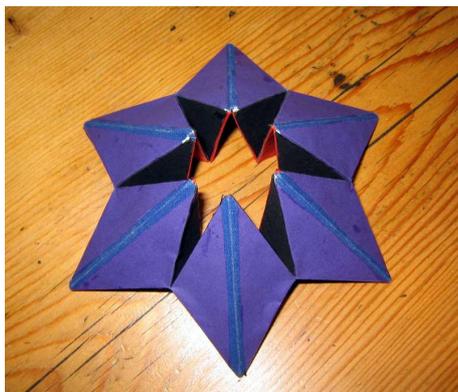


Abbildung 2.25: Der Gelenkring befindet sich in einer symmetrischen, aber nicht den Forderungen entsprechenden Form

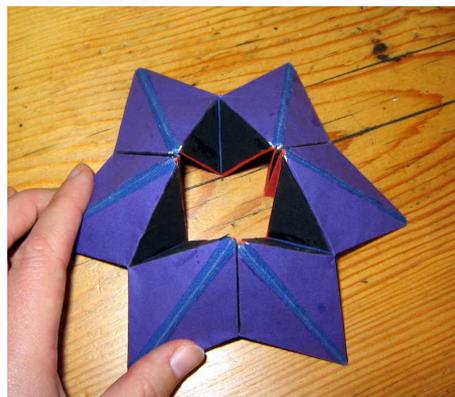


Abbildung 2.26: Die der Form in Abb. 2.25 entsprechende ideale Form des Gelenkrings; drei der sechs Mittelgelenke sind starr

Die Winkel an den Evolutionskanten stimmen bei der idealen Umstülpbewegung mit den Flächenneigungswinkeln der Gürtelkanten überein, was wiederum zu einer einheitlichen, ästhetischen Bewegung führt. Diese Forderung kommt allerdings beim Oktaeder nicht zum Einsatz, da im Gürtel keine Kanten ohne Verbindung bleiben; die Flächenneigungswinkel sind dadurch ohnehin gleich groß.

Unendlichkeits- und Ebenendurchgänge

Gemäß den Forderungen an die Platonische Umstülpung müssen während der Umstülpung einige Teile des Körpers durch die Unendlichkeit wandern. Sykora und Maas erklären dazu in [1, S.90] die freie Beweglichkeit der Eckpunkte. Die Eckpunkte beim Umstülpkörper sind nicht fest; sie sind vielmehr „als Schnittpunkt von Geraden (den verlängerten Kantengelenken) oder Ebenen (den erweiterten Flächensegmenten)“ bestimmt. Während der Umstülpbewegung ist ein solcher Eckpunkt damit beweglich. Die Anzahl dieser freien Eckpunkte kann so groß sein wie die Anzahl der Kantengelenke, da diese sich paarweise schneiden müssen.

Bei Körpern mit dreieckigen Flächen genügen zwei Segmente pro Fläche, um den Körper ideell zu ergänzen. Ein Eckpunkt ergibt sich aus dem Schnittpunkt der beiden verlängerten Kantengelenke der Fläche, die anderen beiden als Schnittpunkte jeweils eines verlängerten Kantengelenks der Fläche mit denen der jeweils benachbarten Flächen.

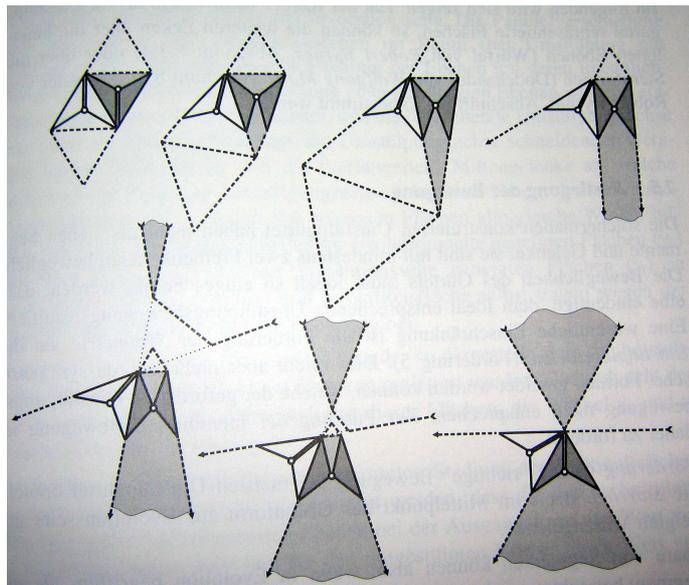


Abbildung 2.27: Flächenverwandlungen beim Sykora-Oktaeder

In der Urform fallen die beweglichen, gedachten Eckpunkte noch mit den tatsächlichen Eckpunkten der Segmente zusammen. Wird nun bei der Umstülpung der Winkel zwischen zwei Segmenten größer, so wandert der Schnittpunkt immer weiter in die Ferne. Liegen die beiden den Punkt erzeugenden verlängerten Kantengelenke parallel zueinander, so „verschwindet“ der Punkt im Unendlichen. An dieser Stelle bietet sich die Betrachtung mit Hilfe der Projektiven Geometrie an; der Schnittpunkt

der beiden Kantengeraden liegt demnach auf der unendlich fernen Gerade. Vergrößert sich der Winkel bei der Fortsetzung der Umstülpbewegung, so kehrt der Punkt von der anderen Seite her wieder ins Endliche zurück (siehe auch Abb. 2.27 aus [1, S.91]).

Der ideelle Körper ist nun unendlich groß. Im weiteren Verlauf der Umstülpung wird schließlich der Ebenendurchgang erreicht. Alle Flächenneigungswinkel nehmen gleichzeitig den Wert 180° an. Im Fall des Oktaeders von Sykora liegen in der Vorstellung sechs unendlich große Flächen vor. Die tatsächlich vorhandenen Segmente bilden einen ebenen Sechsstern. Die übrigen zwei Flächen sind punktförmig entartet – beide werden durch die im Mittelpunkt des Rings (d.h. des Körpers) zusammenfallenden Eckpunkte begrenzt. Ähnliche Beobachtungen ergeben sich auch bei den anderen Platonischen Umstülpmodellen.

Führt man die Umstülpbewegung weiter, so verkleinert sich der Winkel zwischen den beiden betrachteten Segmenten wieder, und der durch die Unendlichkeit gewanderte Punkt kehrt nach einem zweiten Unendlichkeitsdurchgang wieder auf seine ursprüngliche Seite zurück. Erst dann hat der ideelle Körper wieder eine endlich große Oberfläche; sein Volumen jedoch bleibt ideell unendlich, da nun sein Inneres nach außen zeigt. Der vorher unendliche, außen vorhandene Raum befindet sich nun innerhalb des Körpers und wird in der Negativform vollständig vom Umstülpkörper umhüllt (vgl. [5, S.17]).

Beispiele für Platonische Umstülpkörper

In diesem Abschnitt werden nun zwei Platonische Umstülpkörper vorgestellt. Dabei handelt es sich zum einen um das Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora, welches die Platonische Umstülpung in perfekter Form repräsentiert. Zum anderen geht es um das Dodekaeder von Wolfgang Maas, das eine sehr eindrucksvolle, wenngleich nicht völlig ideale Platonische Umstülpung aufweist. Das Oktaeder wurde im Rahmen dieser Arbeit nachgebaut, Näheres dazu im Abschnitt 5.2.3. Eine sehr umfangreiche Darstellung der verschiedenen Umstülpmodelle Platonischer Körper findet man in [1]. Weitere Umstülpungsvarianten werden in [5] erläutert.

Das Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora Dieser Umstülpkörper zeigt die perfekte Platonische Umstülpung – alle Forderungen werden erfüllt. Die verschiedenen Phasen und Unendlichkeitsdurchgänge lassen sich am Oktaeder von F. und I. Sykora besonders gut beobachten. Die Konstruktion des Oktaeders wurde bereits in den vorangegangenen Abschnitten erläutert. Die Umstülpbewegung des Körpers wird im Folgenden mit Hilfe von Bildern beschrieben.

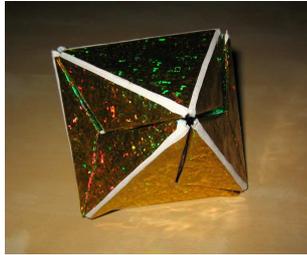


Abbildung 2.28: Das Sykora-Oktaeder mit seinen Riegeln in der Urform



Abbildung 2.29: Der Umstülpgürtel (Mitte) mit den beiden Riegeln

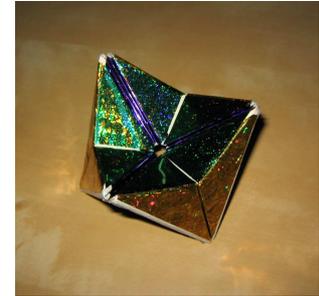


Abbildung 2.30: Der Umstülpgürtel in seiner Grundstellung

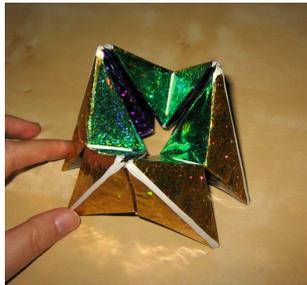


Abbildung 2.31: Umstülpungsbewegung. Drei der Mittengelenke bleiben zunächst starr



Abbildung 2.32: Erster Unendlichkeitsdurchgang. Je zwei Gelenkkanten sind parallel



Abbildung 2.33: Weiterführung. Der ideelle Körper ist jetzt unendlich groß



Abbildung 2.34: Erster Ebenendurchgang. Alle Außenflächen (gelb) liegen in einer Ebene



Abbildung 2.35: Weiterführung. Der Umstülpgürtel öffnet sich wieder in der Mitte



Abbildung 2.36: Zweiter Unendlichkeitsdurchgang. Man beachte die parallelen Kanten



Abbildung 2.37: Weiterführung. Der ideelle Körper hat nun wieder endliches Volumen



Abbildung 2.38: Negativform. Alle Außenflächen (gelb) zeigen nach innen



Abbildung 2.39: Weiterführung; die beiden Pole tauschen ihre Rollen



Abbildung 2.40: Erster Unendlichkeitsdurchgang des zweiten Pols (Unterseite)

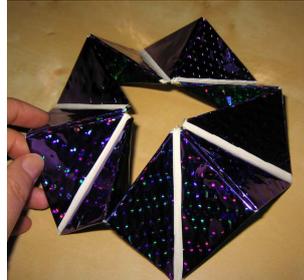


Abbildung 2.41: Weiterführung. Die Mitte beginnt sich wieder zu schließen



Abbildung 2.42: Zweiter Ebenendurchgang. Die Außenflächen liegen nun unten



Abbildung 2.43: Weiterführung. Die Mitte des Gelenkrings öffnet sich wieder



Abbildung 2.44: Zweiter Unendlichkeitsdurchgang des zweiten Pols



Abbildung 2.45: Weiterführung. Der Körper kehrt zu seiner Urform zurück

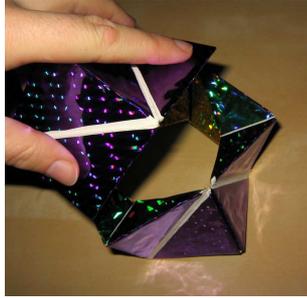


Abbildung 2.46: Einsetzen der umgeklappten Riegel in den umgestülpten Gelenkring



Abbildung 2.47: Blick in die Negativform. Innen erscheint das Oktaeder als Hohlform

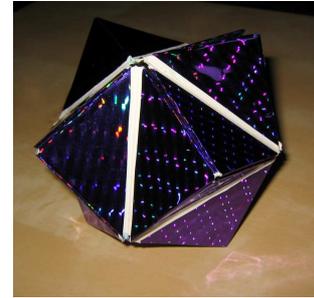


Abbildung 2.48: Vollständige Negativform. Es entsteht eine räumliche Sternform

Das Dodekaeder von Wolfgang Maas Ähnlich wie das Oktaeder hat auch das umstülpbare Dodekaeder Flächenpole. Der Gürtel (siehe Abb. 2.49) repräsentiert die übrigen zehn Flächen mit jeweils zwei Segmenten, hat also insgesamt zwanzig Segmente. Die Riegel bestehen aus den Polflächen-Segmenten und jeweils einem Fünftel der angrenzenden Flächen; die Polflächen-Segmente werden dabei zum Hauptriegel zusammengefasst, während die Flächenteilstücke entlang der Polflächenkante beweglich mit diesem Hauptriegel verbunden werden. Auf diese Weise wird ähnlich wie beim Oktaeder eine Ergänzung der Negativform durch die umgeklappten Riegel ermöglicht. Abbildung 2.50 zeigt den Gelenkring und die beiden Riegel, von denen einer (links vorne) bereits umgeklappt ist. Innerhalb der durch den Gürtel dargestellten Flächen sind die Gürtelsegmente durch Flächenmittengelenke verbunden. Die anderen zehn Gelenke werden durch die zehn äquatorial liegenden Kanten gebildet.

Anders als beim Oktaeder können die beweglichen Eckpunkte nicht als Schnittpunkt der Kantengelenke konstruiert werden, denn die zu den Polen hinführenden Kanten sind ja nicht als Kantengelenke verarbeitet, sondern werden durch den Schnitt der benachbarten Flächenebenen bestimmt. Die jeweils fünf Eckpunkte der Polflächen müssen also anders bestimmt werden.

Die Konstruktion der ideellen Eckpunkte erfolgt über den Keplerschen Dodekaederstern (vgl.[1, S.119]): Verlängert man sämtliche Kanten des Dodekaeders über den Körper hinaus, so erhält man neben den Eckpunkten des Dodekaeders noch weitere Kantenschnittpunkte. Zusammen mit den verlängerten Kanten bilden diese den Keplerschen Dodekaederstern. Mit Ausnahme der oberen und unteren Spitze können alle seine Spitzen als Schnittpunkte der zehn Kantengelenke konstruiert

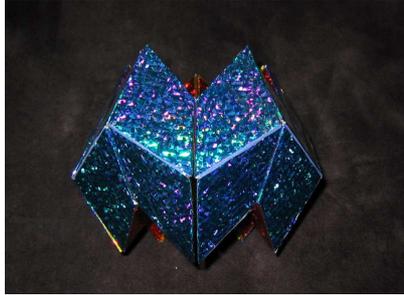


Abbildung 2.49: Dodekaeder von W. Maas: Seitenansicht des Gelenkrings



Abbildung 2.50: Der Umstülpgürtel (hinten) und die beiden umklappbaren Riegel

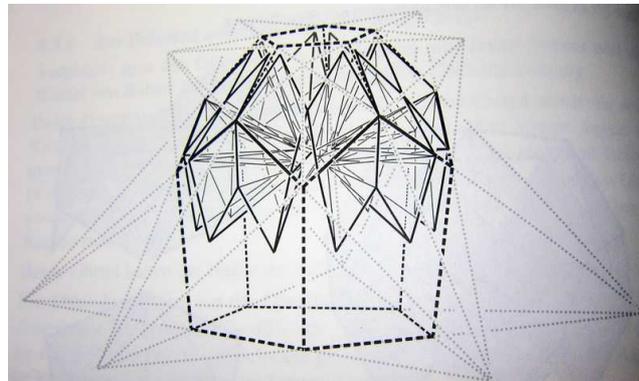


Abbildung 2.51: Konstruktion der ideellen Eckpunkte beim Dodekaeder von Maas [1, S.120]

werden, auch während der Umstülpbewegung des Gürtels (der Sternkörper ist dann entsprechend verzerrt, siehe auch Abbildung 2.51). Verbindet man die oberen fünf Spitzen in Form eines Pentagramms, so ergibt sich ein Fünfeck in der Mitte; dessen Eckpunkte sind die gesuchten Eckpunkte der Polfläche.

Das Dodekaeder von Wolfgang Maas stellt die bislang beste Annäherung an die Platonische Umstülpung dar. Das Modell zeigt lediglich Mängel bei der Konstruktion der ideellen Ergänzung, die im Vergleich zum Oktaeder sehr komplex ist. Insbesondere die Unendlichkeitsdurchgänge sind dadurch weit weniger anschaulich als beim Oktaeder. Sykora und Maas erwähnen in [5] mehrere Möglichkeiten zur Konstruktion des ideellen Körpers, von denen hier eine beschrieben wurde und die jeweils unterschiedliche Eigenschaften der Platonischen Umstülpung in den Vordergrund stellen. Die wesentlichen Merkmale und Phasen der Platonischen Umstülpung werden durch dieses Modell jedoch erfasst (Abbildungen 2.53 - 2.63).



Abbildung 2.52: Das Dodekaeder mit seinen verdreht angeordneten Riegeln in der Urform



Abbildung 2.53: Der Gelenkgürtel des Dodekaeders in der Grundstellung



Abbildung 2.54: Beginnende Umstülpung; fünf Mittengelenke sind noch starr



Abbildung 2.55: Erster Ebenendurchgang; in der Mitte bildet sich ein fünfzackiger Stern



Abbildung 2.56: Weiterführung der Umstülpung; der Ring schließt sich zu keinem Zeitpunkt



Abbildung 2.57: Der Ring in der Negativform; alle Außenflächen (blau) zeigen nach innen



Abbildung 2.58: Im weiteren Verlauf der Bewegung öffnet sich der Körper wieder



Abbildung 2.59: Zweiter Ebenendurchgang mit erneutem Fünfstern in der Mitte



Abbildung 2.60: Der Körper schließt sich wieder zu seiner Urform

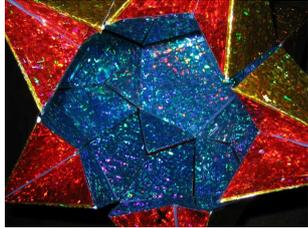


Abbildung 2.61: Blick ins Innere der Negativform; innen erscheint das ursprüngliche Dodekaeder (blaue Flächen) als Hohlform



Abbildung 2.62: Einsetzen der Riegel in die Negativform; die umgeklappten Riegel haben wieder die Form eines fünfzackigen Sterns



Abbildung 2.63: Die Negativform ist eine gute Näherung an den Keplerstern, der durch Verlängerung der Dodekaederkanten entsteht

Anmerkungen

Man kann sich nun darüber streiten, ob es sich überhaupt um eine Umstülpung handelt, wenn doch nur ein Teil des Platonischen Körpers die Umstülpungsbewegung mitvollzieht. Sykora und Maas lösen dieses Problem, indem sie sich auf die Idee des Platonischen Körpers beziehen(vgl. [1, S.80]:

„Der geometrische Körper als solcher ist immer nur eine Idee. Alle seine Realisationen sind nur Annäherungen an die Idee. Um die Idee zu repräsentieren, ist nicht die Vollständigkeit im materiellen Sinne nötig, sondern die vollständige Bestimmung der charakteristischen Elemente. Es müssen genügend solcher Elemente konstruktiv realisiert sein, um daraus in gesetzmäßiger Eindeutigkeit den Körper (seiner Idee nach) zu ergänzen.“

Die Verletzung des Platonischen Körpers durch die Wegnahme von Riegelkörpern ist also nach ihrer Auffassung „nur eine scheinbare“ (Wolfgang Maas in [5]), da man sich den Körper in seiner Vollständigkeit aus den materiell vorhandenen Teilen ideell ergänzen kann. Unter Verwendung der projektiven Geometrie ist dies sogar während der gesamten Umstülpbewegung möglich.

Bei Ernhofer hingegen stand von Anfang an der Zwanglauf im Vordergrund. Die Wegnahme von Riegeln wird bei seinen Konstruktionen schlichtweg durch die me-

chanische Notwendigkeit rechtfertigt. Ein Anspruch auf Ganzheitlichkeit wird bei seiner Zielsetzung auch nicht erwähnt.

Im folgenden Abschnitt geht es nun um die sogenannte Ganzheitliche Umstülpung. Diese Art der Umstülpung kommt ohne Herausnahme von Riegelkörpern aus; der Körper wird als Ganzes umgestülpt.

2.2.3 Ganzheitliche Umstülpung

Der Ursprung der ganzheitlichen Umstülpung ist nicht ganz eindeutig: mehrere Personen arbeiteten unabhängig voneinander auf diesem Gebiet und kamen teilweise zu unterschiedlichen Ergebnissen. Bei dieser Art der Umstülpung werden keine Riegelkörper entnommen. Der Körper wird in kongruente Teile untergliedert und diese werden dann in einem oder mehreren Gelenkringen verbunden. Der Begriff der Ganzheitlichkeit bezieht sich hier weniger auf den Platonischen Körper in seiner geometrischen Form, sondern vielmehr auf die Gesamtheit seiner Teile. Es wird betont, dass der Körper „als Ganzes“ umstülpbar ist.

1964 ließ sich der Münchener Erfinder Peter-Michael Pfeiffer einen umstülpbaren Würfel patentieren, der aus einem Ring mit acht würfelförmigen Gliedern besteht. Die gleiche Würfel-Aufteilung wurde in den Siebziger Jahren vom Bildhauer Naoki Yoshimoto erneut gefunden. Er erweiterte das Modell, indem er die würfelförmigen Ringglieder in zwei gleiche Teile gliederte und damit zwei gleich geformte Ringe erhielt. Diese bilden eine Sternform und können zu einem Würfel mit einem sternförmigen Hohlraum umgestülpt werden. Dieses Modell wurde unter dem Namen „The Shinsei Mystery“ weltbekannt. Ein zweites, unter dem Namen „The Shinsei Miracle“ bekanntes Würfelmodell wurde ebenfalls von Yoshimoto entwickelt.

Auch der Arzt Hartmut Endlich hat sich mit der Ganzheitlichen Umstülpung beschäftigt. Er versuchte gezielt, die Platonischen Körper als Ganzes umzustülpen und dabei auch die von der Platonischen Umstülpung her bekannten Hüllformen zu erreichen, die den ursprünglichen Körper als Hohlform enthalten. In [3] stellt er einige dieser Modelle kurz vor, jedoch ohne Abbildungen. Erst vor kurzem entwickelte der Grafiker Fred Voß weitere ganzheitliche Umstülpmodelle der Platonischen Körper, die zwar keine vollständige Hüllform ermöglichen, jedoch sehr interessante Formen bilden können.

Die Forderungen an die Ganzheitliche Umstülpungen sind wesentlich geringer als beispielsweise die der Platonischen Umstülpung. Maßgeblich ist, dass der gesamte Körper an der Umstülpung beteiligt ist; es sollen keine Riegel entnommen werden und der gesamte Körper soll in einem oder mehreren symmetrischen Gelenkringen

enthalten sein. Als Gelenke dienen ausgewählte Kanten der Teilstücke. Mit diesen Merkmalen lässt sich eine ganze Reihe von verschiedenen Modellen beschreiben, von denen einige im folgenden als Beispiele vorgestellt werden.

Es liegt jedoch auf der Hand, dass die Bewegungen der Ringe durch die schwächeren Anforderungen kaum eingeschränkt werden. Da die Ringe meist aus zwölf oder mehr Gliedern bestehen, haben sie einen hohen Freiheitsgrad, und weil so gut wie keine Forderungen an die Art der Bewegung gestellt werden, bleibt Raum für zahlreiche Formverwandlungen. Allein der von Hartmut Endlich entwickelte Cubus X soll mehr als 200 Formen ermöglichen.

Beispiele für die Ganzheitliche Umstülpung

Der Würfel von Pfeiffer und Yoshimoto Der Würfel wird entlang seiner zu den Oberflächen parallelen Symmetrieebenen in acht gleich große Teilwürfel untergliedert. Diese werden entlang von je zwei Kanten pro Teilwürfel miteinander verbunden. Die Gelenkkanten liegen auf den Symmetrieebenen des Würfels, außerdem liegen alle in der Oberfläche des Würfels (siehe Abbildung 2.64).

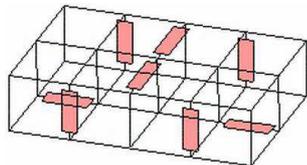


Abbildung 2.64: Verbindungen beim Yoshimoto-Würfel: die Teile des Rings liegen bei dieser Position alle in einer Ebene

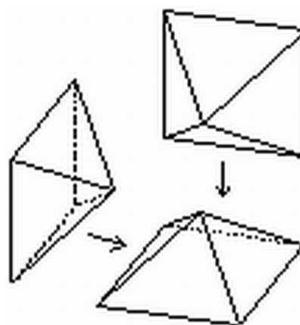


Abbildung 2.65: Zusammensetzung eines Sternwürfel-Ringglieds

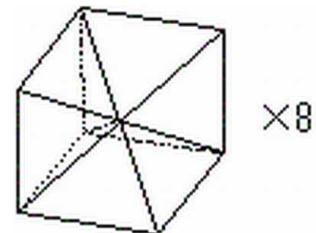


Abbildung 2.66: Zusammengesetztes Ringglied vom Sternwürfel. Jeder der beiden Ringe besteht aus acht solchen Teilen

Eine der drei vierzähligen Symmetrieachsen bildet die Umstülpachse des Würfels. Während des Umstülpungsvorgangs wandern alle nach innen gerichteten Flächen nach außen und die Oberfläche verschwindet im Inneren; es entsteht wieder ein Würfel. Nach einer erneuten Umstülpung erscheint wieder der ursprüngliche Würfel. Zu keiner Zeit entsteht ein Loch in der Mitte des Rings, die Teile liegen immer dicht beieinander. Auch in der „Negativform“, die ja wieder ein Würfel ist, bildet sich kein Hohlraum im Inneren. Darüber hinaus findet sich auch kein Ebenendurchgang wie bei der Platonischen Umstülpung, weil die einzelnen Glieder bereits je-

weils drei Teile der Oberfläche enthalten, die fest im rechten Winkel zueinander angeordnet sind und sich daher nicht in eine gemeinsame Ebene bewegen können. Die Umstülpbewegung des Würfel wird im Kapitel Visualisierung anhand von Abbildungen erläutert.

Yoshimoto hat diesen Würfelring nochmals unterteilt. Sein Modell „The Shinsei Mystery“ besteht aus zwei gleich geformten Ringen, die ineinandergelegt den bereits besprochenen Würfel bilden und gemeinsam umgestülpt werden können. Jeder Ring kann, für sich genommen, von einer Sternform zu einem Würfel mit einem sternförmigem Hohlraum umgestülpt werden, der wiederum der ursprünglichen Sternform entspricht. Der zweite Ring kann also, zur Sternform umgestülpt, in den Hohlraum eingesetzt werden und umgekehrt. Ein einzelnes Ringglied besteht dabei aus drei zusammengefügt quadratischen Pyramiden (siehe Abbildung 2.65). Abbildung 2.67 zeigt einige Bilder vom Originalwürfel.



Abbildung 2.67: Der „Sternwürfel“ von Yoshimoto, auch bekannt als „The Shinsei Mystery“. Aus einem Würfel werden zwei Sterne, von denen jeder wieder zu einem Würfel mit sternförmigem Hohlraum umgestülpt werden kann. In diesen Hohlraum passt der andere Ring in Sternform hinein.

Das Würfel-Modell von Yoshimoto und Pfeiffer lässt sich ebenso wie seine Varianten aufgrund seiner schrittweise ablaufenden Umstülpbewegung ohne Probleme als Computeranimation darstellen. Die Bewegung ist durch die spezielle Anordnung der Gelenkverbindungen und die Form der Ringglieder so eingeschränkt, dass trotz der acht Elemente und dem daraus resultierenden theoretischen Freiheitsgrad von 2 eine leicht zu erfassende Umstülpbewegung entsteht. Im Kapitel 4 wird die Umstülpbewegung durch eine Bilderserie beschrieben.

Das Oktaeder von Hartmut Endlich Die Umstülpkörper von Hartmut Endlich werden in [3] vorgestellt, allerdings ohne Abbildungen. Die dort vorgestellten Umstülpungen der Platonischen Körper haben folgende Gemeinsamkeiten:

- es werden keine Riegelkörper entnommen
- die Untergliederung erfolgt mit Hilfe von Symmetrieebenen
- die einzelnen Teile sind kongruent und berühren sich im Mittelpunkt
- die außen liegende Fläche eines Ringglieds entspricht jeweils der Hälfte oder einem Drittel einer Außenfläche des Körpers
- die vollständig umgestülpte Form enthält den ursprünglichen Platonischen Körper als Hohlraum im Inneren

Meist gibt es mehrere Möglichkeiten zur Ringbildung, Endlich geht jedoch nicht näher auf deren Unterschiede ein.

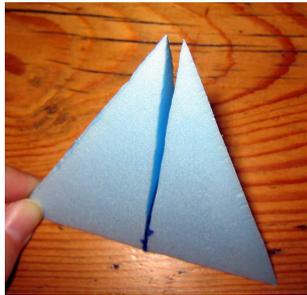


Abbildung 2.68: Zwei Segmente des Oktaeders von H. Endlich



Abbildung 2.69: Anordnung der Glieder im noch offenen Gelenkring

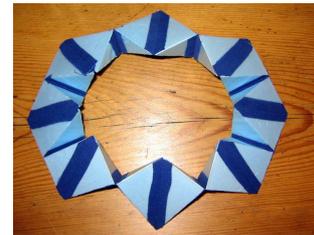


Abbildung 2.70: Geschlossener Gelenkring des Oktaeders

Das Oktaeder von Hartmut Endlich besteht aus 16 Gliedern. Es wird zunächst entlang seiner durch die Kanten verlaufenden Symmetrieebenen in acht Teile untergliedert. Jedes dieser Teile kann als dreiseitige Pyramide mit einer Oktaederfläche als Grundfläche aufgefasst werden, deren Spitze im Mittelpunkt des Oktaeders liegt. Diese Pyramiden werden nun entlang einer zum Oktaedermittelpunkt verlaufenden Kante halbiert, so dass die verbleibenden Teilstücke jeweils eine halbe Oktaederfläche als Außenfläche besitzen und sich im Mittelpunkt berühren. Sie werden mäanderförmig miteinander verbunden, so dass ein Gelenkring entsteht. Die Lage des Rings im Oktaeder entspricht der Lage des Gelenkrings beim Oktaeder von Robert Byrnes (vgl. [1, S.109]). Als Gelenkkanten dienen dabei die ursprünglichen Kanten des Oktaeders und deren gegenüberliegende Kanten an den Ringgliedern.

Laut Endlich gibt es beim Oktaeder drei regelmäßige Ringbildungen, von denen jedoch nur zwei umstülpbar sind. Im folgenden sind einige Bilder von der oben beschriebenen Variante zu sehen.

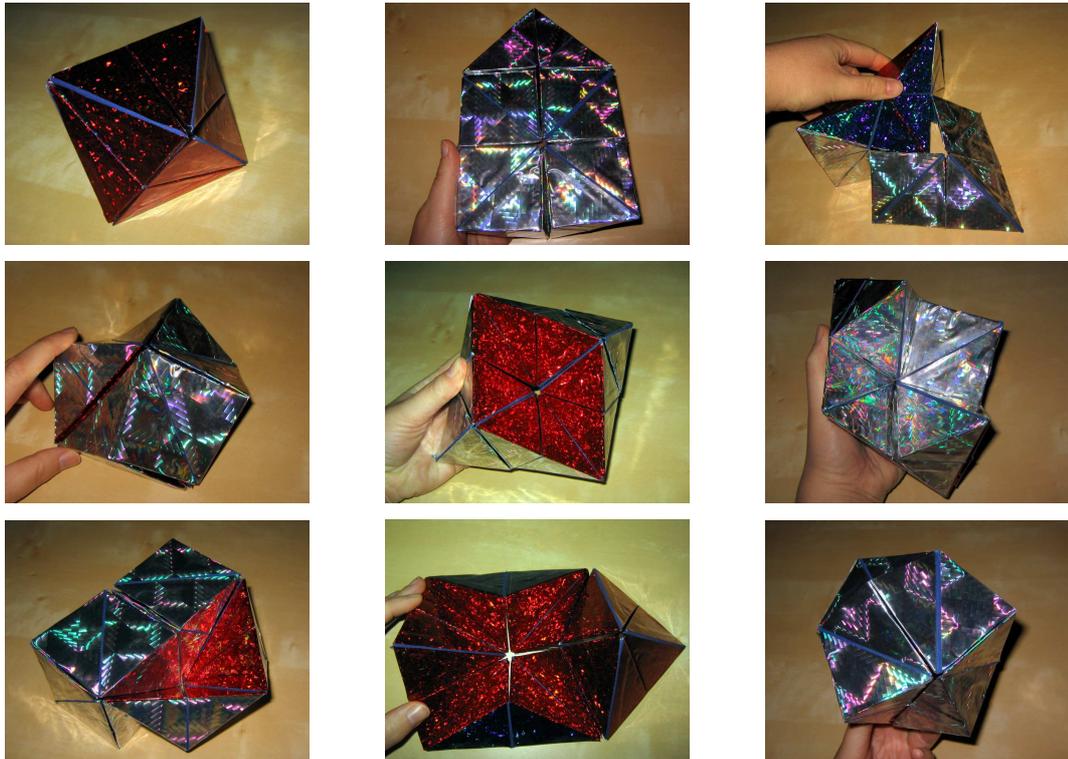


Abbildung 2.71: Einige ausgewählte Formen des Oktaeders. Die letzte Abbildung zeigt die Negativform, bei der das Oktaeder im Inneren als Hohlform enthalten ist. Diese Hüllform entspricht genau der Negativform bei der Platonischen Umstülpung (vgl. Abb. 2.48).

Die Umstülpung des Oktaeders erlaubt zahlreiche Formverwandlungen (siehe Abbildungen 2.71). Ein Ebenendurchgang wie bei der Platonischen Umstülpung wird nicht erreicht. Es lässt sich jedoch eine Hüllform bilden, die in ihrer Gestalt exakt der Negativform beim Oktaeder von Sykora entspricht. Ebenso wie bei diesem hat auch das Oktaeder von Sykora in seiner Hüllform einen Hohlraum von der Form eines Oktaeders. Sämtliche Außenflächen zeigen dann nach innen.

Durch die hohe Beweglichkeit des Gelenkrings lässt sich auch folgende Besonderheit bilden: während eine Hälfte des Oktaeders noch in der Grundstellung ist, lässt sich die andere Hälfte „darüberstülpfen“; die zweite Hälfte hat dann bereits die Hüllform angenommen (siehe Abb. 2.71, erstes Bild in der zweiten Reihe). Ähnliche Positionen lassen sich auch mit dem Umstülpbaren Pentagondodekaeder von Endlich bilden.

Der V Kubus von Fred Voß Das Gebiet der Umstülpung ist noch immer nicht vollständig erforscht; immer wieder werden neue Aufteilungen entdeckt, die eine Umstülpung ermöglichen. Der Grafiker Fred Voss hat in den Jahren 2006-2008 eine Reihe von neuartigen Umstülpkörpern entwickelt. Durch die Beschäftigung mit dem kubischen Gitter stieß er auf verschiedene Beziehungen zwischen Oktaeder, Tetraeder, Würfel und Rhombendodekaeder sowie auf Besonderheiten dieser Körper. Diese Besonderheiten liegen seinen Ganzheitlichen Umstülpungen zugrunde [7].

Fred Voß legt großen Wert auf die Erhaltung des Körpers sowie auf die Herstellung eines symmetrischen Gelenkringes mit einer harmonischen, ästhetischen Bewegung. Es kommt ihm hingegen nicht darauf an, mit dem Gelenkring eine vollständige Hüllform bilden zu können. Somit gehen seine Arbeiten in eine völlig andere Richtung als die bisher behandelten. Seine Körperaufteilungen richten sich dementsprechend an anderen Kriterien aus als beispielsweise die von Hartmut Endlich. Obwohl dessen Gelenkringe auch symmetrisch im jeweiligen Platonischen Körper liegen, zerbricht die Symmetrie beispielsweise beim Cubus X sehr schnell während der Umstülpung. Die Gelenkringe von Voß dagegen lassen eine vollkommen symmetrische Umstülpungsbewegung zu.

Als Beispiel für seine Arbeiten wird hier der V Kubus vorgestellt. Es handelt sich hierbei um eine ganzheitliche Umstülpung des Würfels unter Erhaltung der Raumdiagonale. Darunter ist allerdings nicht die Erhaltung der Würfeldiagonalen zu verstehen, wie sie beim Würfel von Schatz bereits zu finden ist. Beim Schatz-Würfel ist damit eine (gedachte) Verbindung zweier auf dem Gürtel gegenüberliegender Würfel-Eckpunkte gemeint, die während der gesamten Umstülpbewegung in ihrer Länge konstant bleibt. Das ist hier nicht der Fall: mit „Erhaltung der Raumdiago-

nale“ wird hier die Tatsache bezeichnet, dass durch die Aufgliederung des Würfels in die einzelnen Glieder die Raumdiagonale nicht zerschnitten wird (wie etwa beim Cubus X von Endlich), sondern als Kante an mehreren Teilen erhalten bleibt.

Die Aufteilung des Würfels erfolgt mit Hilfe der dreizähligen Symmetrieachse des Würfels, die durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte verläuft. Für die Schnitte liegt folgende Beobachtung zugrunde: Voß erkannte, dass senkrecht zur dreizähligen Symmetrieachse ein ebenes Sechseck in den Würfel eingebettet werden kann, dessen Eckpunkte auf den Kantenmittelpunkten des Würfels liegen (siehe Abbildung 2.72).

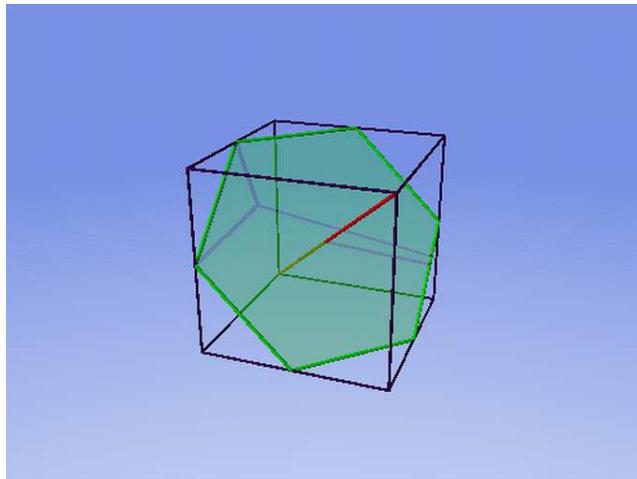


Abbildung 2.72: Kantenhalbierenden-Sechseck im Würfel

Verbindet man die Eckpunkte dieses Sechsecks mit den beiden Würfel-Eckpunkten auf der Symmetrieachse, so ergibt sich ein diamantähnlicher symmetrischer Körper mit zwölf gleichschenkligen Dreiecksflächen. Voß schneidet nun entlang dieser Flächen, so dass neben dem Diamantkörper noch sechs kleinere Tetraeder entstehen. Der gesamte Würfel wird zusätzlich entlang aller sechs Symmetrieebenen des Diamantkörpers geschnitten, so dass sich letztlich 24 Teile ergeben, nämlich 12 große und 12 kleine Tetraeder (siehe auch Abbildung 2.73).

Damit erhält man bei der Aufteilung nicht nur ein, sondern gleich zwei verschiedene Elemente. Die großen und kleinen Tetraeder sind jeweils zueinander kongruent, jedoch besteht zwischen den verschiedenen Elementen keine direkte Beziehung. Für die Verbindungen hat Voß zwei verschiedene Möglichkeiten gefunden. Auffallend hierbei ist, dass sich benachbarte Gelenkachsen schneiden können (wie das auch bei Endlich teilweise der Fall ist). Die Abbildung 2.74 zeigt die beiden verschiedenen Anordnungen der Glieder im (noch nicht geschlossenen) Gelenkring.

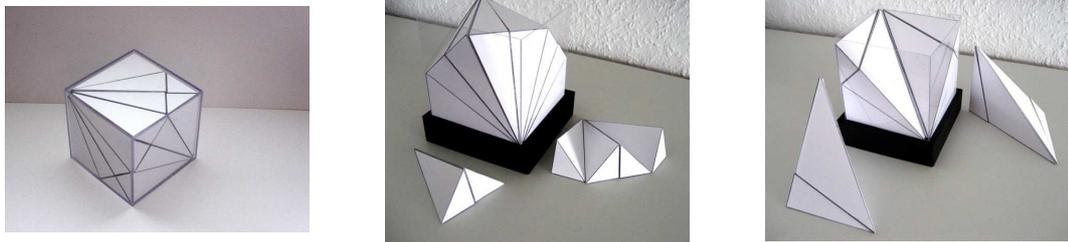


Abbildung 2.73: Aufteilung des V Kubus. Das erste Bild zeigt die Gesamtansicht des Würfels. Im zweiten Bild ist die Entstehung des Diamant-Körpers zu sehen, und das dritte Bild veranschaulicht die Erhaltung der Raumdiagonale.



Abbildung 2.74: Anordnung der Glieder beim V Kubus I und V Kubus II. Man beachte, dass die Gelenke im Gegensatz zur ersten Version bei der zweiten alle in einer Ebene liegen

Die zweite Version wurde als Modell nachgebaut (Modell 5.2.5). Die folgenden Abbildungen zeigen die Abfolge der Formverwandlungen während der Umstülpung.

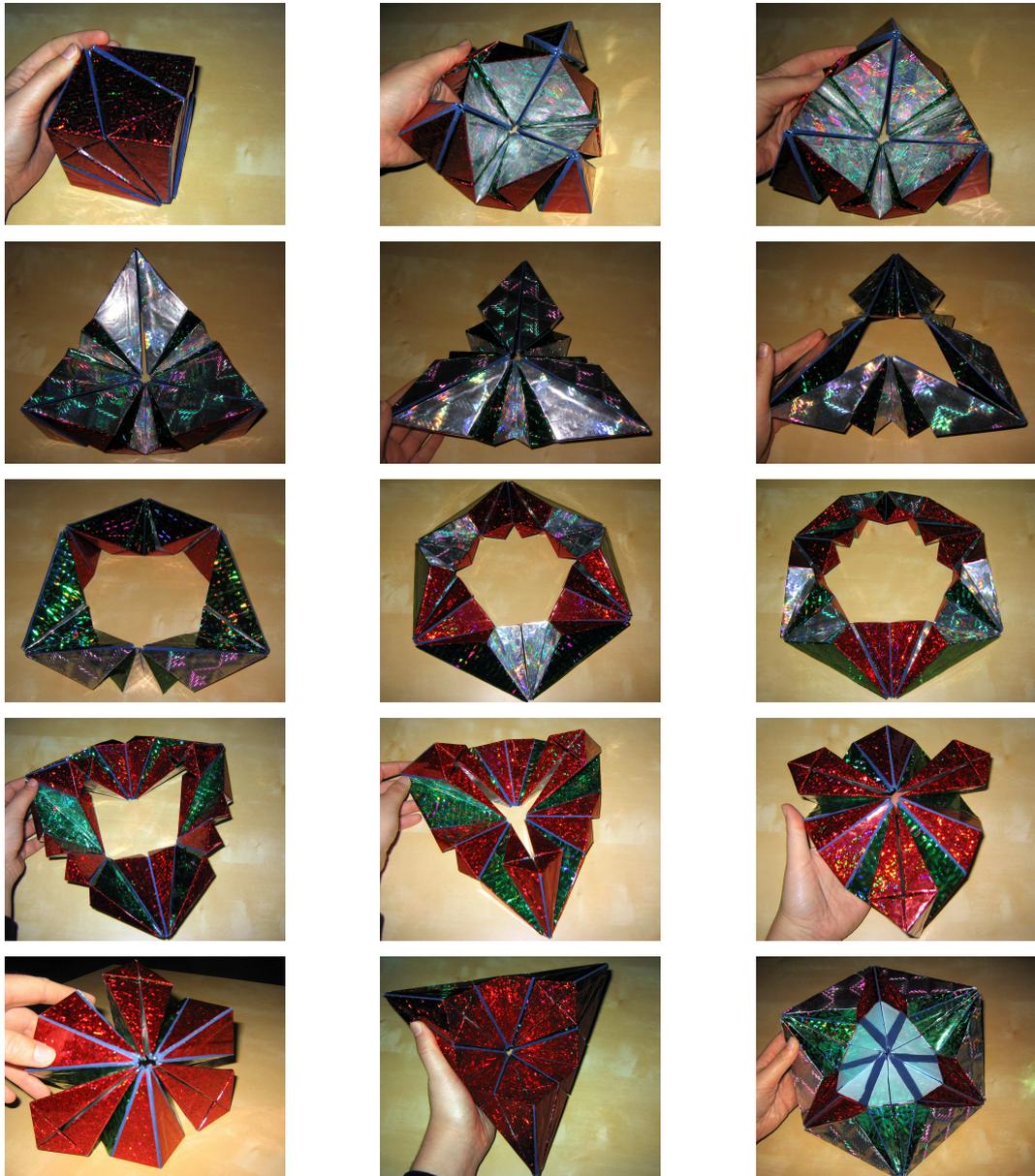


Abbildung 2.75: Der V Kubus II während der Umstülpung. Ein Ebenendurchgang wird ebensowenig erreicht wie eine vollständige Negativform, es lässt sich jedoch eine partielle Hüllform bilden (vorletztes Bild). In der weitesten Position des Rings lässt sich außerdem ein Würfel in die Mitte einbetten (letztes Bild), und zwar so, dass das Kantenhalbierenden-Sechseck dieses Würfels genau in der Ringebene liegt und die Gelenkkanten zwischen den kleinen Ringgliedern eine Verlängerung der Würfelkanten bilden.

Kapitel 3

Verwertbarkeit

Die Verwertung von Umstülpkörpern ist noch nicht weit fortgeschritten. Bislang wurden lediglich zwei verschiedene Gelenkringe technisch umgesetzt. Obwohl die Effizienz dieser Technik unbestritten ist, konnten sich die betreffenden Geräte bisher nur zum Teil durchsetzen. Neben der potenziellen technischen Nutzbarkeit sind Umstülpkörper jedoch vor allem aus künstlerischer und pädagogischer Sicht interessant.

3.1 Technische Nutzung

Der am häufigsten genutzte Umstülpkörper ist der Gelenkring des umstülpbaren Würfels von Paul Schatz. Seine rhythmische Bewegung wurde vielfach untersucht. Insbesondere die Konstanz der Raumdiagonale spielt eine entscheidende Rolle bei der technischen Verwertbarkeit dieses Rings.

Die bekannteste Umsetzung ist der Einsatz in Mischmaschinen (Turbula und Inversina). Hier wird genau genommen nur eine Hälfte des Gelenkrings verwendet. Die beiden äußeren Glieder sind im Gestellglied schwenkbar gelagert und mit dem mittleren Glied ebenso schwenkbar verbunden (siehe auch Abb. 3.1). Das Gestellglied selbst entspricht der konstanten Würfeldiagonale. Das mittlere Ringglied ist der Mischbehälter. Dieser vollführt taumelnde, rhythmische Bewegungen. Vor allem bei pulverförmigen Stoffen erreichen diese Maschinen sehr gute Ergebnisse bei geringem Zeit- und Energieaufwand (vgl. [1], [6]).

Fixiert man ein Glied des Würfelrings und betrachtet die Raumpur der nicht mit diesem Glied verbundenen Raumdiagonale, so erhält man einen Abwicklungskörper, das sogenannte Oloid (siehe Abb. 3.2). Es hat zwei scharfe, halbkreisförmige

Kanten. Vervollständigt man diese zu Kreisen, so enthält jeder dieser beiden Kreise den Mittelpunkt des anderen. Das Oloid kann als konvexe Hülle dieser beiden Kreise betrachtet werden. Seine Oberfläche lässt sich knickfrei aus einem Stück steifen Papiers herstellen. Lässt man ein Oloid eine schiefe Ebene hinabrollen, so rollt es stets über die glatte Oberfläche, nie über die scharfen Kanten, und vollführt dabei eine ähnlich taumelnde Bewegung wie der oben beschriebene Mischbehälter.



Abbildung 3.1:
Inversina-Mischmaschine



Abbildung 3.2:
Ein Oloid aus Metall

In [6] erläutert Schatz die Verwendung dieses Körpers als Rührkörper in Wasserbelüftungsmaschinen. Der Rührkörper wird durch eine spezielle Apparatur ähnlich der Aufhängung des Mischbehälters bei der Inversina am eigentlichen Gerät befestigt (siehe Abb. 3.3). Das Gerät selbst wird auf einem schwimmenden Gestell auf die Wasseroberfläche gesetzt (siehe Abb. 3.4). Insbesondere bei der Belüftung von Abwasser in Kläranlagen und bei der Sanierung von stehenden Gewässern leistet ein Oloid-Mischer effiziente Arbeit (vgl. [13]). Die pulsierende Bewegung des Oloids bewirkt eine gute Sauerstoff-Versorgung bei einer deutlichen Energieersparnis gegenüber den herkömmlichen Druckbelüftern. Dennoch hat sich diese Technik noch nicht flächendeckend in den Kläranlagen durchgesetzt.

Ein weiterer, in [1] beschriebener Gelenkring wurde als Mischmaschine umgesetzt, nämlich der sechsgliedrige Swing-Gelenkring. Bei diesen hier nicht näher erläuterten Gelenkringen schneiden sich benachbarte Gelenkachsen, was eine andersartige Bewegung als bei den hier betrachteten Ringen bewirkt. Dennoch ist auch diese Mischmaschine sehr effektiv; ein besonderer Vorteil gegenüber der Turbula oder Inversina besteht darin, dass hier der Mischbehälter während der gesamten Mischbewegung mit flexiblen Leitungen verbunden bleiben kann (vgl. [1, S.78]).

Da der Zwanglauf eine wesentliche Voraussetzung für die technische Nutzung eines Gelenkrings ist, kommen viele der hier behandelten Gelenkringe für eine solche nicht in Frage. Der technische Aufwand für die Führung dieser Ringe wäre hoch,



Abbildung 3.3: Das Oloid als Rührkörper



Abbildung 3.4: Oloid-Belüfter

und ihr Nutzen im Vergleich zu den zwangläufigen Ringen fraglich (vgl. [1, S.134]). Die Modelle von Ernhofer sind alle aufgrund ihres Zwanglaufs potenziell technisch nutzbar, eine konkrete Umsetzung blieb jedoch bislang aus.

3.2 Künstlerische und pädagogische Aspekte

Die Beschäftigung mit Umstülpkörpern schult das räumliche Wahrnehmungs- und Vorstellungsvermögen (vgl. [5]). Die Formen und Bewegungen werden immer wieder als faszinierend und eindrucksvoll beschrieben. Eine künstlerische Auseinandersetzung mit diesen Objekten scheint durchaus denkbar, zumal die Ästhetik bei der Konstruktion vieler Modelle eine wesentliche Rolle spielt.

Erfahrungen mit Schülern verschiedener Altersstufen haben gezeigt, dass Kinder und Jugendliche mit großer Faszination die Umstülpkörper erkunden. Die Modelle werden ertastet, auseinandergenommen und zusammengesetzt und natürlich auch umgestülpt. Die Schüler entwickeln ein geradezu spielerisches Interesse an der Geometrie der Körper. Insbesondere jene Umstülpkörper, die vielseitige Formen zulassen (z.B. Cubus X), sind sehr beliebt und werden in immer anderen Formen zusammengesetzt, während die Platonischen Umstülpkörper vor allem durch ihre vollständige Hüllform beeindrucken.

Eine Beschäftigung mit den Umstülpkörpern kann auch bei sonst eher schwächeren Schülern reges Interesse an der Geometrie wecken und lehrreiche Einblicke in

die Geometrie bieten. Es wäre zum Beispiel denkbar, den Lehrsatz des Pythagoras über den Bau des Würfels von Paul Schatz oder über die Konstruktion von zwangläufigen Tetraeder-Ringen zu motivieren und einzuführen. Auch die Erarbeitung von Zwanglauf-Kriterien wie der maximalen Gelenkkantenlänge (siehe Satz 3 in Abschnitt 2.1.1), wie sie bei Byrnes in [2] zu finden ist, könnte im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Trigonometrie ihren Platz finden.

Zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens eignen sich die Platonischen Umstülpkörper. Sobald die Riegelkörper entfernt sind, muss der Körper gedanklich vervollständigt werden. Diese Vorstellung während der gesamten Umstülpung beizubehalten, erfordert eine gute räumliche Orientierung. Die Platonischen Umstülpkörper können darüber hinaus auch eine große Hilfe bei der Veranschaulichung der Projektiven Geometrie sein. Der Übergang zu Fernelementen und wieder zurück wird bei diesen Modellen besonders deutlich.

Kapitel 4

Visualisierung

Umstülpungen sind dynamische Prozesse, das Wesentliche an ihnen ist die Bewegung. Eine Bilderserie von einer Umstülpungsbewegung kann nur Momentaufnahmen liefern, aber nicht die Eigenart einer Bewegung festhalten. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, sich mit bewegten Modellen von Umstülpkörpern auseinanderzusetzen. Da konkrete Modelle nicht immer verfügbar sind, bieten virtuelle Darstellungen und Animationen eines solchen Körpers eine attraktive Alternative. In diesem Kapitel geht es zunächst um virtuelle Modelle, in Kapitel 5 wird auch die Herstellung konkreter Modelle beschrieben.

Als Werkzeug für die virtuelle Darstellung einiger Umstülpkörper wurde das Raytracing-Programm POV-Ray v.3.6 for Windows eingesetzt. Mittels einer Szenen-Beschreibungssprache werden die Umstülpkörper modelliert und animiert. Das Programm verfügt über eine Reihe von Grundformen (z.B. Würfel, Quader, Ebenen, Zylinder etc.), aus denen durch Schneiden und Vereinigen die einzelnen Glieder der Umstülpkörper hergestellt werden können. Zudem bietet POV-Ray die Möglichkeit, Serienbilder von einer Bewegung zu erzeugen, die dann mit Hilfe anderer Werkzeuge zu fertigen Animationen zusammengesetzt werden können, z.B. mit dem Programm Animated GIF Producer.

Das Arbeiten mit POV-Ray ist zunächst wenig intuitiv, erfordert aber abgesehen von gewissen Grundkenntnissen in Computergrafik und Geometrie nur wenig Einarbeitung. Die Beschreibungssprache lässt sich relativ leicht erlernen.

4.1 Möglichkeiten und Grenzen

Wie bereits angedeutet, können die Glieder der Gelenkringe recht schnell durch Schnitt- und Vereinigungs-Operationen aus den Grundelementen des Programms hergestellt werden. Die Grundposition des Rings ist somit schnell zu modellieren. Das eigentliche Problem bei der Visualisierung von Umstülpungen liegt jedoch darin, die Bewegung mathematisch zu fassen. Jedes einzelne Glied bewegt sich anders - zwar ist die Bewegung der Glieder symmetrisch, man muss jedoch erst einmal die Bewegung eines Glieds erfassen. Selbst bei einem sechsgliedrigen Ring, dessen Bewegung auch ohne zusätzliche Forderungen eindeutig festgelegt ist, müssen einige Berechnungen gemacht werden, bis man die Position der Glieder in Abhängigkeit von der Zeit angeben kann.

Bei Ringen mit mehr als sechs Gliedern muss man durch weitere Forderungen (wie z.B. Symmetrie um die Mittelachse) die Bewegung weit genug einschränken, dass eine eindeutige Bestimmung der Lage überhaupt möglich ist. Bei Modellen wie dem Dodekaeder von Wolfgang Maas müsste man hierzu nicht nur Symmetrieebenen miteinbeziehen, sondern auch die Gleichheit bestimmter Winkel fordern. Die Berechnungen für die Lage der Eckpunkte des entsprechenden Gürtels werden dadurch schnell unübersichtlich und sind ohne numerische Verfahren kaum zu bewältigen.

Noch keinen Ansatz für eine Visualisierung gibt es für Modelle, deren Umstülpungsbewegung asymmetrisch abläuft, wie beispielsweise der Cubus X von H. Endlich. Der zwölfgliedrige Würfelring verliert sehr schnell seine Symmetrie bei der Umstülpung und lässt die Bildung von zahlreichen Formen zu. In der Bewegung der Kanten lassen sich kaum Regelmäßigkeiten entdecken, anhand derer man die Bewegung geometrisch erfassen könnte.

In den folgenden Abschnitten werden die im Rahmen der Arbeit visualisierten Modelle vorgestellt. Es handelt sich dabei zum einen um den Würfel von Pfeiffer und Yoshimoto, bei dem die besondere Lage der Gelenkachsen die Erfassung der Umstülpbewegung sehr erleichtert. Zum zweiten wurde der Würfel von Konrad Schneider modelliert. Dessen achtgliedriger Ring konnte unter Berücksichtigung der symmetrischen Lage bestimmter Punkte animiert werden.

4.2 Der Würfel von Yoshimoto und Pfeiffer

Obwohl dieses Modell acht Glieder hat, ist seine Bewegung eindeutig festgelegt (vgl. auch Abschnitt 2.2.3). Die Gründe dafür sind die besondere Lage der Ge-

lenkachsen sowie die Form der Ringglieder. Je zwei Gelenkkanten liegen auf einer gemeinsamen Achse. Die Umstülpbewegung lässt sich dadurch in acht nacheinander ablaufende Schritte einteilen, von denen jeder sich durch eine (bzw. zwei parallel ausgeführte) Achsenrotation(en) beschreiben lässt.

Zunächst werden die acht würfelförmigen Ringglieder modelliert. Hierzu wird der Würfel mit seinen parallel zu den Oberflächen verlaufenden Symmetrieebenen zum Schnitt gebracht. Für die richtige Form der Ringglieder wäre dieses Vorgehen nicht unbedingt nötig; man könnte auch acht einzelne Würfel direkt modellieren. Die beschriebene Vorgehensweise hat jedoch den Vorteil, dass man durch unterschiedliches Einfärben der Schnittebenen den Innenseiten der Würfelglieder andere Farben verleihen kann. Dadurch wird die Umstülpbewegung besser nachvollziehbar. Zur besseren Hervorhebung der einzelnen Glieder wurden außerdem die Kanten des Würfels durch sehr dünne Zylinder in einer dunklen Farbe modelliert.

Die eigentliche Bewegung ist in sechs Schritte unterteilt. Nach drei Schritten liegt wieder ein Würfel vor. Die übrigen drei Schritte entsprechen den ersten drei Schritten, jedoch um 90° um die y -Achse verdreht.

Man kann nun jeden einzelnen Schritt mittels einer Achsenrotation der betreffenden Teile um die jeweilige Gelenkachse beschreiben. Im ersten und vierten Schritt werden zwei Achsenrotationen parallel zueinander ausgeführt, diese sind jedoch symmetrisch und lassen sich daher leicht synchronisieren.

Für die gesamte Animation wurden 60 Bilder eingeplant, jeweils 10 für jeden Abschnitt. Weniger Bilder führen zu deutlichem Ruckeln, mehr Bilder würden die Ergebnisdatei entsprechend vergrößern, was wiederum deren Verwendbarkeit für eine e-learning-Umgebung einschränken würde. Es wurden allerdings die Zwischenpositionen mehrfach eingefügt, um an diesen Stellen der Animation kurzen Pausen zu erzielen. Die Animation wurde also aus insgesamt 72 Bildern erstellt.

Die erste Rotation erfolgt entlang der beiden waagrecht Flächenhalbierenden zweier gegenüberliegender Seitenflächen des Würfels (rechte und linke Fläche im ersten Bild von Abb. 4.1). Wie man in Abbildung 4.1 sieht, drehen sich jeweils zwei Ringglieder um 180° entlang dieser Achsen. Als nächste Zwischenposition erhält man einen flachen Quader.

Entlang der Flächenhalbierenden längs der Bodenfläche dieses Quaders werden nun jeweils vier der acht Ringglieder um 90° nach unten geklappt (Abb. 4.2) und bilden so wieder einen Quader. Damit dieser Quader auch während und nach dem Bewegungsschritt auf der Ebene (grau) liegt, muss das gesamte Modell entsprechend nach oben bewegt werden. Wie weit das Modell für verschoben werden muss, lässt sich leicht aus dem Winkel der umgeklappten Teile zur y -Achse berechnen.

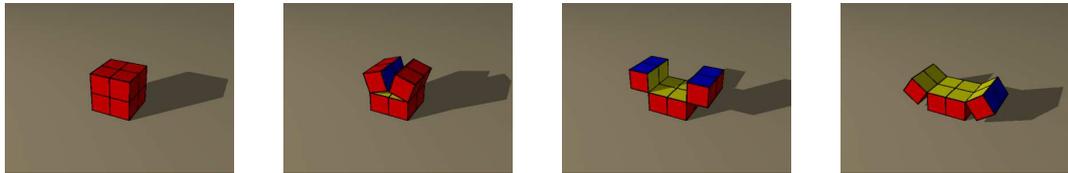


Abbildung 4.1: Yoshimoto-Würfel: erster Umstülpungsschritt

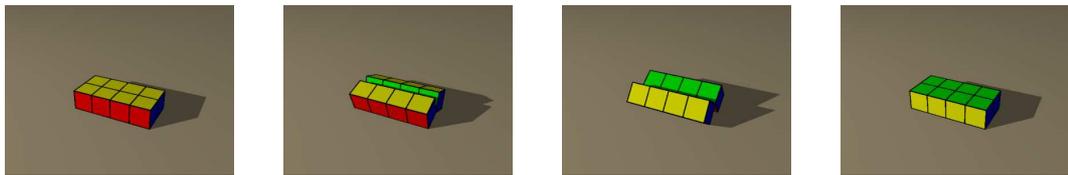


Abbildung 4.2: Yoshimoto-Würfel: zweiter Umstülpungsschritt

Der Quader wird nun entlang der kurzen Flächenhalbierenden auf der Unterseite wieder zum Würfel zusammengeklappt (siehe Abb. 4.3). Dabei drehen sich jeweils vier Teile um 90° . Das Resultat ist ein Würfel, bei dem die ursprünglichen Außenflächen (rot) vollständig nach innen gerichtet sind und die Innenflächen (blau, gelb und grün) nach außen.

Wiederholt man diese drei Schritte um 90° um die y -Achse verdreht, so erhält man wieder den Ausgangswürfel. Die beiden Ringe des Sternwürfels von Yoshimoto, auch bekannt als „The Shinsei Mystery“, funktionieren auf die gleiche Art und Weise. Diese Animation kann als Grundlage verwendet werden, es müssen lediglich die acht Teilwürfel durch die in Abbildung 2.66 beschriebenen Sternwürfel-Ringglieder ersetzt werden. Die Lage der Gelenkkanten und deren Bewegungen sind gleich. Im Internet sind unter [11] weitere interessante Varianten dieses Umstülpkörpers zu finden.

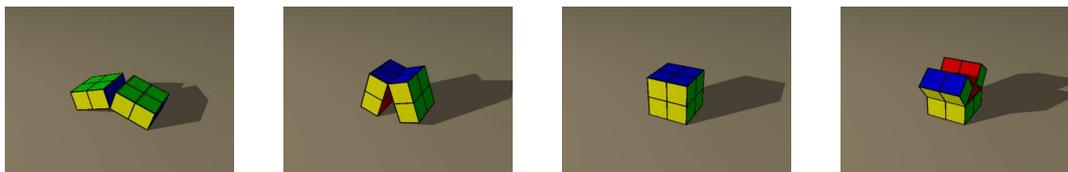


Abbildung 4.3: Yoshimoto-Würfel: dritter Umstülpungsschritt und Andeutung des vierten Schritts

4.3 Der Würfel von Konrad Schneider

Der Würfel von Konrad Schneider besteht aus seinem Gelenkring und zwei gleichförmigen Riegelkörpern. Der Ring besteht aus acht kongruenten Teilen. Die Riegel bestehen jeweils aus einem großen Teilstück, das vier zusammengefügte Ringgliedern entspricht, und vier beweglich mit dem großen Teilstück verbundenen kleinen Gliedern, die in Form und Größe den Ringgliedern entsprechen. Das Modell wird zu den Platonischen Umstülpkörpern gezählt, wenngleich es nicht alle Forderungen erfüllt. Die Abbildung 4.4 zeigt den Aufbau des Gelenkrings. Die einzelnen Glieder wurden wie zuvor beim Würfel von Yoshimoto durch Schnitte mit Ebenen aus dem Würfel gewonnen; hier wurden allerdings die diagonalen Symmetrieebenen verwendet.

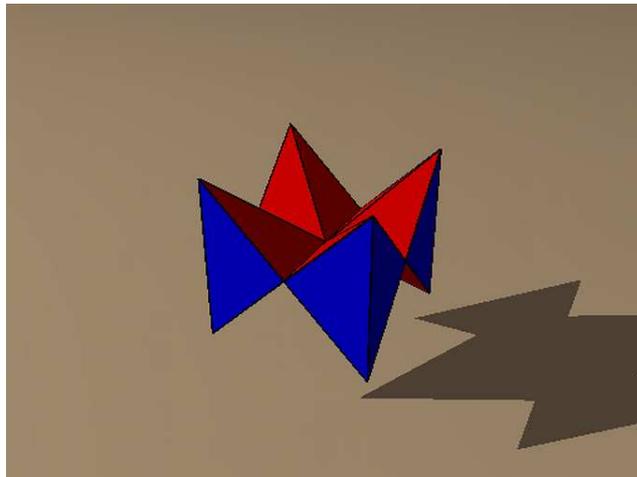


Abbildung 4.4: Der Gelenkring des Würfels von Konrad Schneider

Die größte Schwierigkeit bei dieser Animation bestand darin, die Bewegung des Rings mathematisch zu fassen. Der Ring hat acht Glieder, besitzt also mindestens zwei Freiheitsgrade. Seine Bewegung ist jedoch durch die Forderung nach Symmetrie um die Mittelachse eindeutig. Um diese Symmetrie verwenden zu können, wurde auch dieser Körper so modelliert, dass sein Mittelpunkt im Ursprung liegt. Die Mittelachse des Rings ist dann durch die y -Achse gegeben.

Für die Animation musste eine Größe gefunden werden, durch welche die Position des Gelenkrings eindeutig bestimmt ist. Als solche eignen sich die Winkel zwischen den Gelenkachsen und einer festen Geraden oder Ebene. Da die kurzen Gelenkkannten in der Grundstellung (und auch in der Negativform) auf der x -Achse bzw. auf der z -Achse liegen und sich während der gesamten Umstülpung innerhalb der xy -Ebene

bzw. innerhalb der yz -Ebene bewegen, wurde der Winkel β zwischen einer kurzen, in der Grundstellung auf der x -Achse liegenden Gelenkkante und der x -Achse selbst für die Festlegung der Position verwendet. Dieser Winkel durchläuft während der Umstülpung alle Werte von 0° bis 360° . Ein Endpunkt der Gelenkkante verbleibt dabei immer auf der x -Achse. Man könnte nun einwenden, dass die Gelenkkante mit der x -Achse ja nur Winkel von 0° bis 180° bilden kann. Die Werte zwischen 180° und 360° bewirken allerdings andere Bewegungen als die zwischen 0° und 180° , da die Gelenkkante jeweils in eine andere Richtung weist.

Der Winkel zwischen dieser kurzen Gelenkkante und der x - bzw. z -Achse sei also vorgegeben. Um jedes Ringglied in die richtige Position zu bringen, sind zwei Drehungen nötig. Zum einen neigen sich die kurzen Gelenkkanten entsprechend dem Winkel β von den Koordinatenachsen weg, wobei die Flächenmittelpunkte der Seitenflächen (und damit ein Endpunkt dieser Kanten) stets auf der entsprechenden Achse verbleiben. Zum anderen drehen sich die Ringglieder um die kurzen Gelenkkanten um den Winkel γ paarweise einander entgegen. Darüber hinaus sind die Flächenmittelpunkte auf den Achsen nicht fix. Die Entfernung zum Ursprung nimmt während der Umstülpung Werte zwischen s (Distanz zum Ursprung in Grundposition) und dem Maximum von $\sqrt{2}s$ (Distanz zum Ursprung beim Ebenendurchgang) an.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Drehungen lässt sich wesentlich leichter erfassen, wenn man sie in umgekehrter Reihenfolge ausführt. Man neigt die Ringglieder paarweise entlang der Koordinatenachsen x und z einander zu, und zwar um den Winkel γ . Anschließend wird die kurze Gelenkkante so weit geneigt, dass die Projektion der langen Gelenkkanten auf die xz -Ebene mit der x -Achse einen Winkel von 45° bildet; nur dann entspricht der Ring immer noch der Forderung nach Symmetrie. Dieser zweite Neigungswinkel entspricht dem vorgegebenen Winkel β . Aus dieser Beziehung lässt sich folgender Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln ableiten:

$$\tan(\gamma) = \sin(\beta)$$

Damit lässt sich zu jedem Winkel β berechnen, wie stark zwei benachbarte Glieder zueinander geneigt werden müssen, bevor die dazwischenliegende kurze Gelenkkante um β geneigt wird.

Nun muss nur noch die Verschiebung entlang der x -Achse bzw. entlang der z -Achse berechnet werden. An dieser Stelle wird einmal mehr die Forderung nach Symmetrie ausgenutzt. Die Würfeckpunkte müssen in jedem Fall auf den beiden diagonalen Symmetrieebenen des Würfels liegen, die sich in der z -Achse schneiden. Das bedeutet, dass die x - und z -Koordinaten der Punkte stets den gleichen Betrag haben

müssen. Also muss eine Koordinate an die andere angeglichen werden, denn jeweils einer der beiden Werte ist durch die Drehungen bereits richtig.

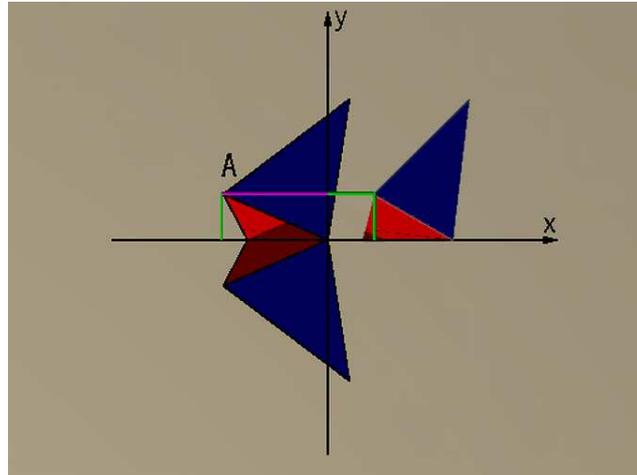


Abbildung 4.5: Gedrehtes Gliederpaar im Ursprung. Die Verschiebung zurück entlang der x -Achse berechnet sich aus dem x -Wert (violett) und dem z -Wert (grün) des Eckpunkts A.

Zur Verdeutlichung betrachten wir ein Ringglied, dessen kurze Gelenkkante auf der positiven x -Achse liegt. Für die Drehungen wird es zunächst um die halbe Würfelkantenlänge entlang der x -Achse verschoben, damit der Flächenmittelpunkt im Ursprung liegt. Es folgt eine Drehung mit dem Winkel γ um die x -Achse und anschließend eine Drehung mit dem Winkel β um die z -Achse. Die z -Koordinate der beiden Eckpunkte sind nun korrekt. Jetzt muss das Ringglied wieder in x -Richtung an seinen Platz verschoben werden, und zwar so, dass die x -Koordinaten der Punkte mit deren z -Koordinaten übereinstimmen. Dafür berechnet man mittels der entsprechenden Drehmatrizen die momentane Lage eines der beiden Eckpunkte; so erhält man dessen x - und z -Koordinate und daraus dann die fehlende Verschiebung.

Die Animation der Riegel gestaltet sich vergleichsweise einfach: es genügen einfache Translationen und Drehungen, um sie zunächst vom Ring wegzubewegen, zu drehen und wieder zum umgestülpten Ring hinzuzufügen. Abbildung 4.6 zeigt einige Einzelbilder aus der Animation.

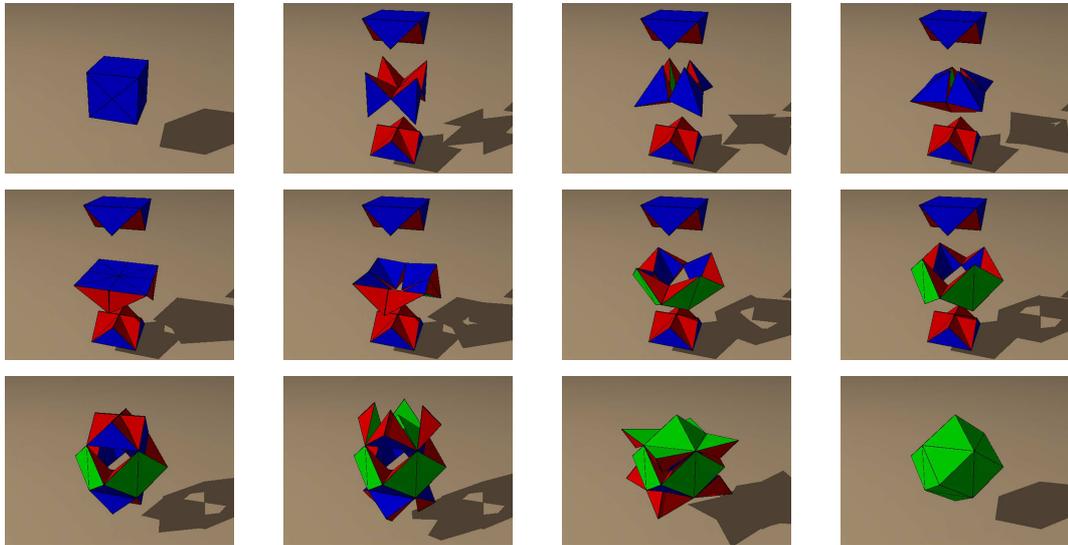


Abbildung 4.6: Einzelne Bilder aus der Animation des Würfels von Konrad Schneider

Das Prinzip der Gürtelanimation lässt sich vermutlich auch auf andere symmetrische Ringe in Platonischen Körpern übertragen. Es dürfte jedoch erheblich schwieriger sein, den Zusammenhang zwischen den beiden Drehwinkeln zu finden, da die Gelenke im Allgemeinen nicht auf den Koordinatenachsen liegen. Auch die Ausnutzung der Symmetrieebenen zur Berechnung der endgültigen Lage der Punkte ist wesentlich komplexer. Dieser Ansatz wurde im Rahmen der Arbeit nicht weiter verfolgt.

Kapitel 5

Praktische Herstellung

Auch wenn ein Umstülpkörper noch so genau durch Fotos, Bilder und Animationen beschrieben werden kann – der beste Weg, einen solchen Körper vollends zu verstehen, ist das „Begreifen“ (im wahrsten Sinne des Wortes) eines konkreten Modells. Keine Kamera und keine virtuelle Darstellung kann die Wahrnehmung der eigenen Sinne ersetzen – das gilt im besonderen Maß bei beweglichen Körpern. Viele der in Kapitel 2 beschriebenen Eigenschaften der Modelle werden erst durch das physische Modell wirklich einleuchtend, wenn man sieht, wie sich Gelenke und Ringglieder miteinander bewegen und sich zu ihren Formen zusammenfügen.

Der praktische Teil dieser Arbeit umfasste daher auch den Bau einiger Modelle. Die Auswahl erfolgte willkürlich; es wurde jedoch für jede der vorgestellten Umstülpungsvarianten mindestens ein Beispiel nachgebaut. Der erste Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit den verschiedenen Möglichkeiten zur Herstellung von Umstülpkörpern. Auch die dabei auftretenden Schwierigkeiten und Möglichkeiten zu deren Bewältigung werden angesprochen. Im zweiten Abschnitt folgt eine Auflistung der einzelnen nachgebauten Modelle sowie konkrete Angaben zu deren Herstellung.

5.1 Modellbau

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, ein Modell eines Umstülpkörpers herzustellen. Sie lassen sich in drei grobe Kategorien einteilen, nämlich in Kanten-, Flächen- und Volumenmodelle. Ein Kantenmodell besteht – wie der Name schon vermuten lässt – aus bestimmten Kanten, die für den Umstülpkörper wesentlich sind. Dazu zählen natürlich die Gelenkkanten sowie mindestens zwei Verbindungskanten

zwischen den Gelenken. Ein solches Modell mutet minimalistisch an und ist eine Herausforderung an das räumliche Vorstellungsvermögen, kann aber durch seine Transparenz gewisse Einblicke liefern, die bei einem Flächen- oder Volumenmodell nicht möglich sind. Ein Beispiel für ein Kantenmodell ist der Inversis-Schatz von KulturatA e.V. (siehe Abb. 5.1). Zur Herstellung benötigt man stabile Metallstäbchen, die an den entsprechenden Stellen im exakten Winkel abgebogen werden müssen, sowie Spiralen, die als Gelenke dienen. Die erforderlichen Kenntnisse über den Körper beschränken sich auf die Kantenlängen sowie die Winkel zwischen den dargestellten Kanten. Davon abgesehen eignet sich die Darstellung als Kantenmodell hauptsächlich für kleine Gelenkringe; größere Ringe oder gar Umstülpkörper mit Riegeln können durch Kantenmodelle nur dürftig repräsentiert werden.

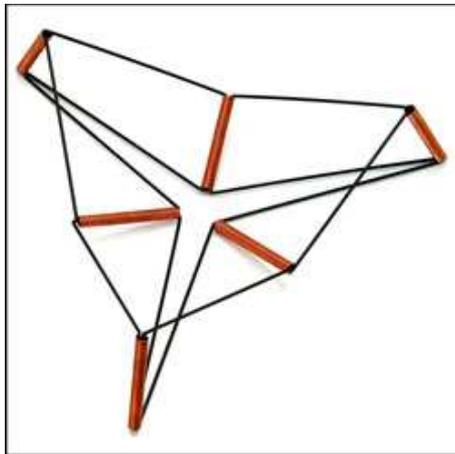


Abbildung 5.1: Ein Kantenmodell des Würfels von P. Schatz

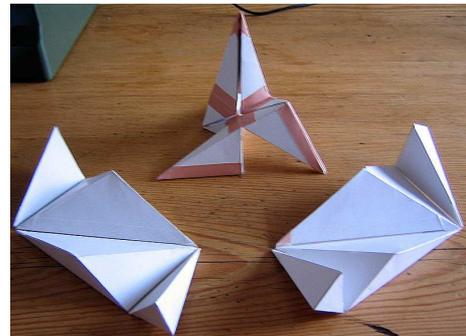


Abbildung 5.2: Ein Flächenmodell des Tetraeders von F. Sykora

Um einiges einfacher gestaltet sich die Herstellung eines Flächenmodells (siehe Abb. 5.2). Hierzu benötigt man die Flächenabwicklung von jedem Ringglied sowie ggf. der Riegelkörper. Als Material bietet sich festes Papier oder dünner Karton an, für die Gelenkverbindungen empfiehlt sich Klebeband, am besten aus Textil (wegen der Stabilität). Bei den bisher gebauten Modellen hat sich Sporttape bestens bewährt. Da diese Materialien leicht zu handhaben sind, eignet sich diese Art der Herstellung am besten für zuhause oder auch für Schulprojekte. Eine Abwicklung lässt sich durch die Kenntnis der Kantenlängen und damit der Flächenbegrenzungen leicht herstellen. Die entstehenden Modelle sind leicht und trotzdem ausreichend stabil.

Dennoch hat die Methode ihre Nachteile. Bei Ringgliedern mit spitzen Winkeln, wie sie bei Umstülpkörpern häufig vorkommen, werden Kartonmodelle oft ungenau – die Dicke des Kartons und die Notwendigkeit von Klebelaschen macht es

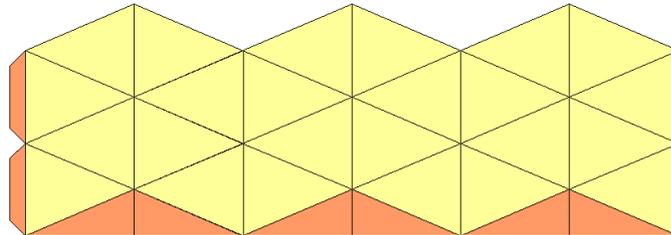


Abbildung 5.3: Netz eines sechsgliedrigen Tetraederrings

schwierig, enge Spitzen exakt zu modellieren. Darüber hinaus ist bei manchen Modellen, insbesondere bei denen der Platonischen Umstülpung, ein Magnetmechanismus nötig, um den Gelenkring sinnvoll handhaben zu können. Die einzelnen Magnete müssten dann im Inneren der Glieder angebracht werden, d.h. bevor die Ringglieder endgültig verschlossen werden; das bedeutet aber ein hohes Maß an Vorausplanung, da man von Anfang an wissen muss, an welchen Stellen Magnete angebracht werden sollen. Ist die richtige Platzierung der Magnete bekannt, so genügt es, jeweils einen ausreichend starken, nicht zu schweren Magneten (z.B. Neodym-Eisen-Bor-Magnete) mit starkem Klebeband an der Innenseite der betreffenden Fläche zu befestigen.

Nicht zuletzt ist der zeitliche Aufwand beim Bau eines Flächenmodells zu nennen. Die Abwicklung jedes einzelnen Bauteils muss exakt auf Karton gezeichnet, ausgeschnitten, zusammengefaltet und geklebt werden – das kann vor allem bei großen Gelenkringen einige Zeit in Anspruch nehmen.

Eine Ausnahme bildet allerdings die Herstellung von einfachen Tetraederringen, wie sie bei Byrnes in [2] beschrieben werden: diese lassen sich sehr leicht aus einem gemeinsamen Netz herstellen und benötigen keine gesonderten Gelenkverbindungen, da die Glieder durch das gemeinsame Netz miteinander verbunden sind (siehe Abb. 5.3). Sie lassen sich schnell und unkompliziert basteln und eignen sich insbesondere zur Verdeutlichung der Zwanglauf-Kriterien aus Abschnitt 2.1.1.

Alle im Rahmen dieser Arbeit gebauten Modelle sind Volumenmodelle, d.h. die Teilstücke der Körper sind massiv. Die einzelnen Ringglieder wurden aus Styrodur (Dämmplatten-Material, ähnliche Konsistenz wie Styropor) geschnitten. Zum Schneiden dieses Materials ist allerdings ein Heißdraht-Schneidegerät nötig (siehe Abb. 5.4); für Schulprojekte oder den Bau zuhause ist diese Methode daher weniger geeignet.

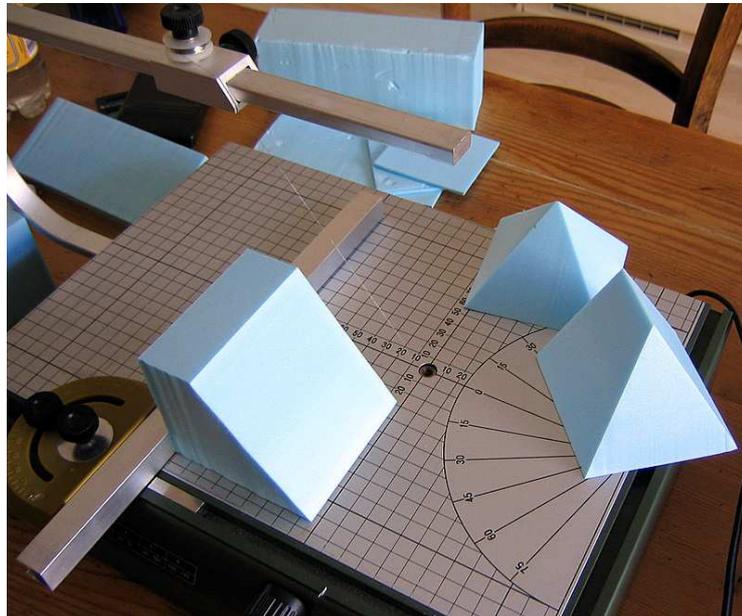


Abbildung 5.4: Heißdraht-Schneidegerät zum Bearbeiten von Styrodur. Hier werden gerade die Teile für ein Sykora-Oktaeder geschnitten.

Wer eine ruhige Hand hat, kann mit diesem Material jedoch sehr genaue Modelle herstellen. Eine Genauigkeit bis auf halbe Millimeter ist bei günstigen Winkeln durchaus machbar. Die geschnittenen Teile sind sehr stabil und besitzen nur ein geringes Gewicht. Auch spitze Winkel stellen kein Problem dar. Ein großer Vorteil ist zudem die Schnelligkeit – innerhalb kurzer Zeit lassen sich viele einzelne Teile herstellen. Dabei werden die Werkstücke entlang einer Schiene durch den Draht geschoben. Dieser kann durch einen verstellbaren Sattel bewegt werden und ermöglicht damit die verschiedenen Schnittwinkel. Für die Gelenkverbindungen wurde Sporttape verwendet (siehe Abb. 5.5).

Auch Magnete lassen sich hier leicht einbauen. Je nach ihrer Größe können sie entweder einfach an den entsprechenden Stellen in das Material eingedrückt werden oder sie werden in vorher ausgehöhlte Vertiefungen eingebettet (siehe Abb. 5.6). Hiefür eignen sich insbesondere kleine, starke Magneten, je nach Größe der Modelle können aber auch größere verwendet werden. Um sie zu fixieren, kann entweder Klebeband darüber geklebt werden oder – wie bei den vorliegenden Modellen – das Modell rundherum mit selbstklebender, bunter Folie beklebt werden. Diese halten dann die Magneten an ihren Plätzen. Die farbigen Folien ermöglichen außerdem eine zusätzliche Betonung von Innen- und Außenflächen; die Umstülpung kann dann leichter nachvollzogen werden.

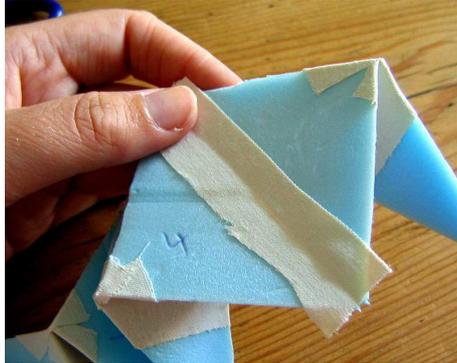


Abbildung 5.5: Gelenkverbindung aus Sporttape; das Klebeband wird beidseitig angebracht

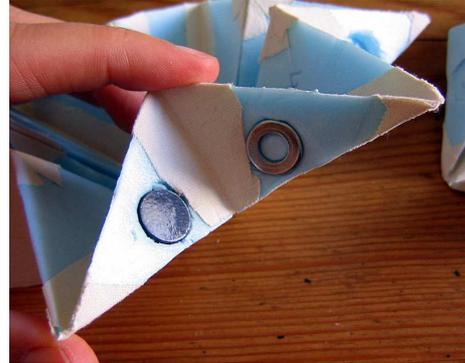


Abbildung 5.6: Einbau eines Magneten und dem zugehörigen Gegenstück, einer Unterlagsscheibe

Die Größe der Modelle – gleich welcher Art – sollte so bemessen sein, dass die Gelenkringe von einer Person gehandhabt werden können. Bewährt hat sich ein Durchmesser von 5 – 15 *cm* (bezogen auf den zugrundeliegenden Platonischen Körper).

5.2 Die Modelle

5.2.1 Der Würfel von Paul Schatz

Die Konstruktion des Würfels von Paul Schatz wurde bereits in Abschnitt 2.2.1 erläutert. Für das Modell wurde eine Würfelkantenlänge von 8 *cm* gewählt. Die Ringglieder lassen sich sehr leicht herstellen. Man beginnt mit einem Quader der Größe $s \times k \times k$, wobei $s = 8 \text{ cm}$ die Länge der Würfelkanten und $k = \frac{1}{3}\sqrt{3}s \text{ cm}$ die Länge der Gelenkkanten bezeichnet. Aus einem solchen Quader kann nun ein Ringglied hergestellt werden. Eine lange Quaderkante bildet dabei die Außenkante des späteren Glieds. Die Gelenkkanten liegen dann auf den kurzen Quaderkanten. Zum Schneiden des Ringglieds wird nun noch der Winkel α der inneren Tetraederflächen zur Außenfläche benötigt. Dieser ergibt sich jedoch ohne großen Aufwand durch die gegebenen Kantenlängen:

$$\tan\alpha = \frac{k}{s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Es müssen zwei Schnitte durchgeführt werden. Sie verlaufen jeweils durch eine Gelenkkante und bilden zusammen mit der rechteckigen Quaderfläche den Winkel α (siehe Abb. 5.7). Für den Ring werden insgesamt sechs Glieder benötigt, wobei zu

beachten ist, dass drei Ringglieder spiegelsymmetrisch zu den anderen sein müssen. Die fertigen Ringglieder werden nun an den Gelenkkanten verbunden; benachbarte

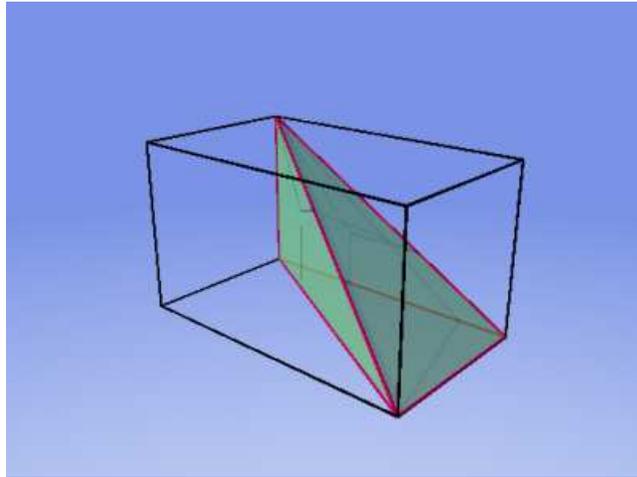


Abbildung 5.7: Quader mit eingebettetem Ringglied des Schatz-Würfels

Glieder sind stets spiegelsymmetrisch zueinander. Der eigentliche Umstülpkörper ist damit bereits fertig. Magnete werden bei diesem Modell nicht benötigt.

Die Herstellung der Riegelkörper gestaltet sich beim Schatz-Würfel schwierig, da diese nicht konvex sind (vgl. Abb. 2.10). Die Schnitte, die für diesen Körper erforderlich wären, gingen nicht durch den ganzen Körper, sondern müssten an einer bestimmten Stelle gestoppt werden. Mit einem Heißdraht-Schneidegerät ist dies aber sehr schwierig, da der Schneidedraht das Material sehr schnell schmilzt und deshalb zügig durch das Material gezogen werden muss. Daher greift man hier zu einem Trick und unterteilt die Riegel in jeweils drei kongruente, jeweils konvexe Teile. Diese können nach Berechnung einiger Winkel mit dem Schneidegerät hergestellt und später wieder zum Riegelkörper zusammengefügt werden.

Für jedes einzelne Teilstück wird ein Quader mit den Maßen $s \times s \times k$ benötigt. Ausgehend von einer kurzen Kante mit der Länge k (an der später eine Gelenkkante des Würfelrings anliegen wird) werden zwei Schnitte im Winkel von 30° zur Quaderseitenfläche ausgeführt (siehe Abb. 5.8). Anschließend werden die Flächen geschnitten, an denen die Teilstücke später zusammengefügt werden. Hierzu werden zwei Schnitte im Winkel von 45° durchgeführt. Die Schnitte verlaufen durch zwei benachbarte Grundkanten des Quaders (siehe Abb. 5.9). Die noch fehlenden beiden Schnitte erfordern einige Berechnungen sowie einen weiteren Kniff beim Schneiden.

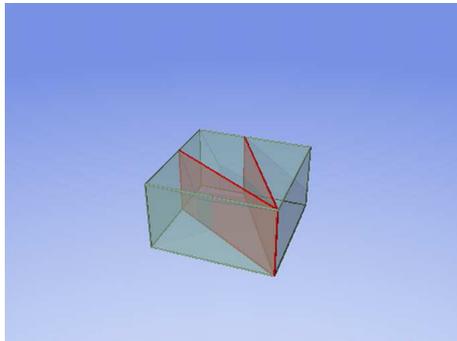


Abbildung 5.8: Erster Schritt beim Schneiden des Riegel-Teilstücks. Die Schnittebenen sind rot gefärbt

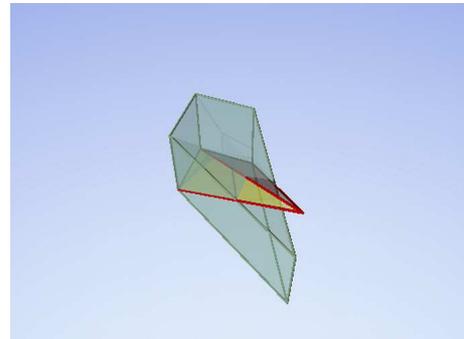


Abbildung 5.9: Zweiter Schritt: Die Schnittebenen (rot und gelb) haben einen Winkel von 45° zur Grundfläche

Mit Hilfe der analytischen Geometrie lässt sich der Aufbau des Riegelteils mathematisch fassen: die Lage der äußeren Eckpunkte ergibt sich durch die Würfel-Eckpunkte und die (Teil-)Kantenlängen, und der innere Punkt, an dem sich die drei Teilstücke treffen, ist genau der Mittelpunkt des Würfels. Aus den Punkten B, M und D bzw. C, M und D können nun die beiden noch fehlenden Schnittebenen konstruiert werden (in Abb. 5.10 die grünen Flächen). Deren Winkel zur Außenfläche des Riegelteils lässt sich anhand ihrer Ebenengleichungen berechnen. Der Schnittwinkel allein hilft hier jedoch noch nicht weiter, da der Schnitt nicht entlang einer Kante erfolgt; man müsste den Schnitt an einer gedachten Geraden entlang führen. Das führt in der Regel zu verwackelten, schiefen Schnittflächen, da keine Orientierungsmöglichkeit existiert.

Um dieses Problem zu umgehen, wurde die Schnittgerade der Schnittebene mit der (zur Ebene erweiterten) Außenfläche berechnet (siehe Abb. 5.10), entlang welcher der Schnitt geführt werden müsste. Damit das Werkstück in Position gehalten werden kann, verwendet man einen Keil, der dem Winkel zwischen der Schnittgeraden und der unteren Kante des Riegelstücks entspricht. Mit diesem Hilfsmittel können auch die letzten beiden Schnitte problemlos durchgeführt werden (siehe Abb. 5.11). Insgesamt werden sechs gleiche Teilstücke benötigt.

Die drei Teilstücke eines Riegels werden nun mit Hilfe von Zahnstochern zusammengesteckt und mit Klebefilm fixiert, bevor sie mit bunter Klebefolie umhüllt werden. Von Klebstoff ist dringend abzuraten, da die meisten Klebstoffe entweder das Material zersetzen oder keinen ausreichenden Halt bieten.

Die beschriebene Vorgehensweise ist lediglich eine Möglichkeit zur Herstellung des Schatz-Würfels. Es finden sich sicherlich viele weitere, je nach dem, in wel-

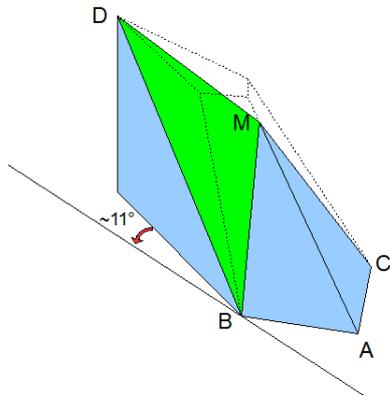


Abbildung 5.10: Dritter Schritt: die Schnittebene (hier grün) schneidet die Grundfläche in der eingezeichneten Gerade

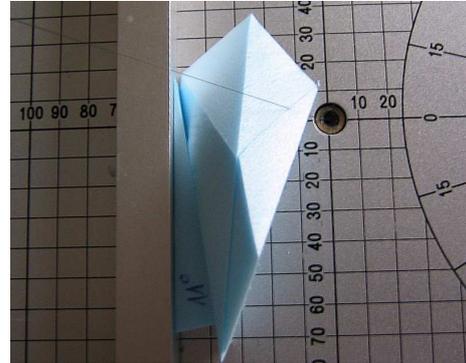


Abbildung 5.11: Zur Führung der letzten beiden Schnitte verwendet man einen Keil mit ca. 11° Neigung

cher Reihenfolge die Schnitte ausgeführt werden und an welchen Kanten und/oder Winkeln sie sich orientieren. Die Bewegung des Würfels ist in Abbildung 5.12 zu sehen.

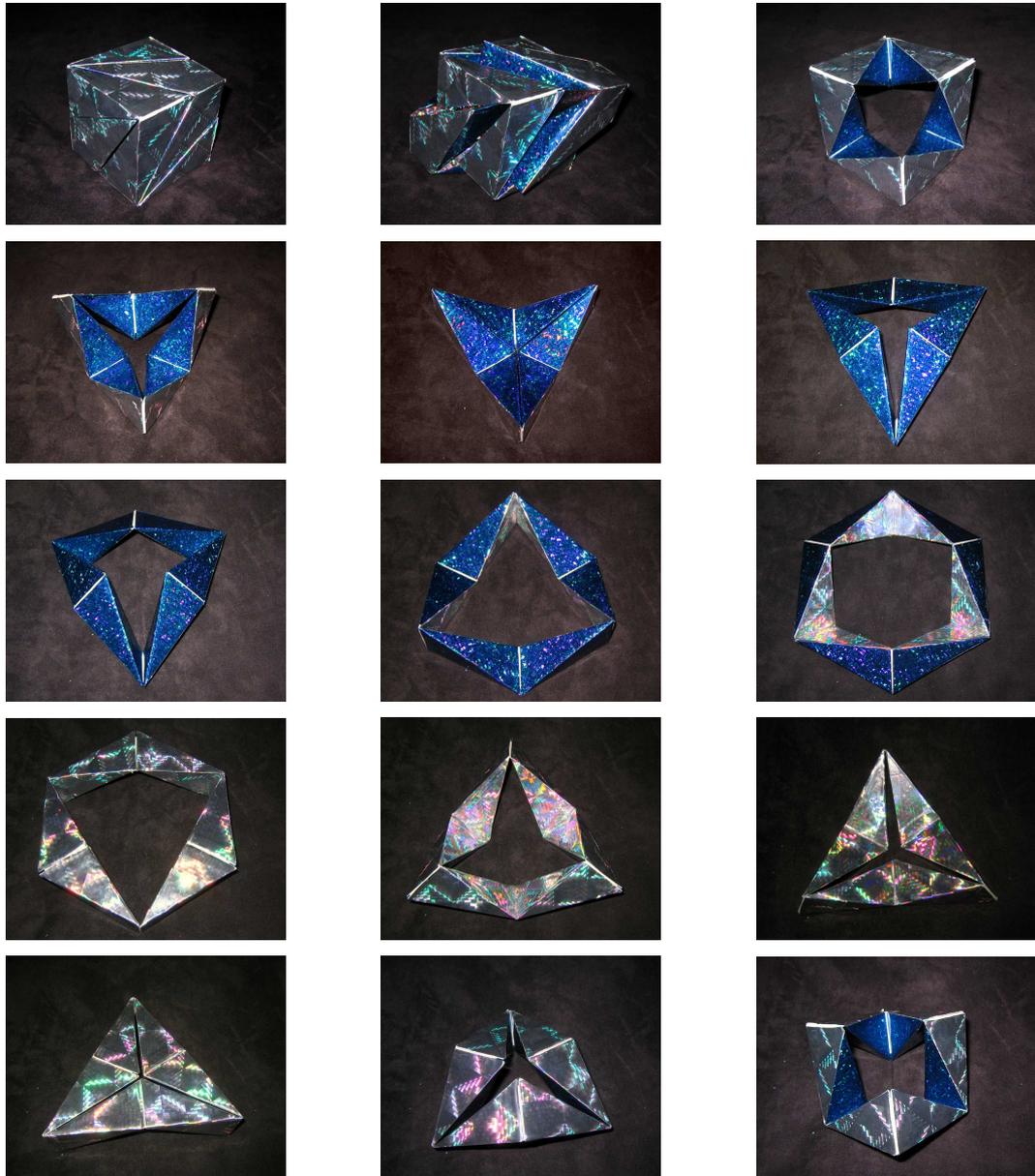


Abbildung 5.12: Der Würfel von Paul Schatz während der Umstülpung. Ähnlich wie beim V Kubus wird keine vollständige Hüllform gebildet, jedoch kommt es dreimal zu einer partiellen Hüllform, bei der die Gelenkkanten tripelweise aufeinander senkrecht stehen (7.,9. und 11. Bild). Es kommt zu vier partiellen Ebenendurchgängen; bei zweien schließt sich der Ring in der Mitte, bei den anderen beiden bildet sich in der Mitte ein gleichseitiges Dreieck.

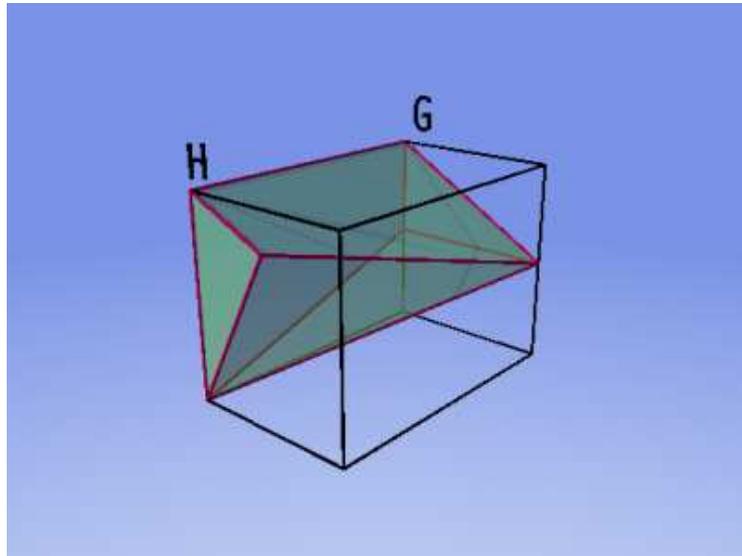


Abbildung 5.13: Grenzfall-Oktaeder von Ernhofer: Lage eines Ringglieds im Quader

5.2.2 Das Grenzfall-Oktaeder von Klaus Ernhofer

Der in Abschnitt 2.2.1 vorgestellte Grenzfall beim Oktaeder ist zwar kein voll beweglicher Umstülpkörper, ein Modell dieses Rings kann jedoch die Zwanglaufkriterien sehr gut veranschaulichen und „begreifbar“ machen.

Bei diesem Modell sind lediglich die sechs Ringglieder zu fertigen, da keine Riegelkörper entnommen werden. Für das Oktaeder wurde eine Kantenlänge von $s = 8,2 \text{ cm}$ gewählt. Damit ergibt sich mit dem pythagoreischen Lehrsatz für den Abstand der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen $h \approx 6,7 \text{ cm}$. Die Verbindungsstrecke dieser beiden Mittelpunkte steht senkrecht auf den beiden Polflächen; an dieser Strecke berühren sich alle sechs Ringglieder.

Jedes Ringglied wird nun aus einem Quader mit den Abmessungen $h \times a \times b$ mit $a = \frac{1}{2}s$ und $b = \frac{1}{3}\sqrt{3}s$ geschnitten. Die Strecke GH hat die Länge h und wird als die Verbindungsstrecke der beiden Oktaeder-Flächenmitten betrachtet. Abbildung 5.13 verdeutlicht die Lage des Ringglieds im Quader.

Da die inneren Flächen (gelbe und rote Flächen in Abb. 2.22) in der Grundstellung alle senkrecht auf den beiden Polflächen stehen und die sechs Ringglieder alle kongruent sind, beträgt der Winkel zwischen den beiden Innenflächen eines Ringglieds 60° . Daher wird zunächst entlang der Strecke GH ein Schnitt mit diesem Winkel ausgeführt.

Auf den beiden den Polflächen entsprechenden Flächen des Werkstücks werden nun die Dreiecksflächen eingezeichnet, wie sie beim fertigen Ringglied verbleiben. Die Dreiecke sind rechtwinklig, die anderen beiden Winkel betragen 30° und 60° . Die Hypotenuse der Dreiecke hat eine Länge von $\frac{1}{3}\sqrt{3}s$, die Katheten haben die Längen $\frac{1}{6}\sqrt{3}s$ und $\frac{1}{2}s$ (zur Berechnung wurde lediglich der Satz des Pythagoras verwendet). Beim Zeichnen muss zum einen beachtet werden, dass an die Punkte G und H stets die Ecke mit dem 60° -Winkel angrenzt und die Dreiecke verdreht angeordnet sind. Zum anderen sind wie beim Würfel drei Ringglieder spiegelsymmetrisch zu den anderen zu fertigen, was beim Zeichnen berücksichtigt werden muss.

Schließlich können die beiden letzten Schnitte erfolgen. Das Werkstück steht auf einer der beiden eingezeichneten Dreiecksflächen. Die längere Kathete des aufgedruckten Dreiecks auf der Oberseite dient als Orientierung für einen Schnitt mit dem Winkel $\alpha \approx 70,5^\circ$. Ebenso verfährt man mit der anderen Dreiecksfläche.

Die sechs Ringglieder werden wiederum mit Sporttape beweglich verbunden, wobei benachbarte Glieder wie zuvor spiegelsymmetrisch zueinander sein müssen. Das entstehende Modell lässt sich ein- und ausstülpen, ohne eine vollständige Umstülpung zuzulassen. Magnete sind auch hier überflüssig.

In Abschnitt 2.2.1 befinden sich Abbildungen, welche die eingeschränkte Bewegung des Grenzfall-Oktaeders illustrieren.

5.2.3 Das Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora

Das in Abschnitt 2.2.2 konstruierte Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora besteht aus insgesamt 20 Teilen. Davon gehören 12 Teile zum umstülpbaren Gürtel. Von den restlichen acht Teilen sind sechs genauso geformt wie die Gürtelglieder, die anderen beiden entsprechen drei zusammengefügte Gürtelgliedern.

Im Gegensatz zu den vorigen Modellen können diesmal aus einem Quader gleich acht Gürtelteile geschnitten werden. Der Quader hat die Abmessungen $s \times s \times h$, wobei $s = 8,5 \text{ cm}$ die Kantenlänge des späteren Oktaeders ist und $h \approx 6 \text{ cm}$ dem Abstand von einem Eckpunkt zum Mittelpunkt beim Oktaeder entspricht. Aus diesem Quader wird zunächst eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche geschnitten, indem entlang der vier langen Kanten einer Seite des Quaders jeweils ein Schnitt mit dem Winkel $\alpha \approx 54,7^\circ$ durchgeführt wird (siehe auch Abbildung 5.4).

Die entstandene Pyramide wird nun mit senkrechtem Schneidedraht entlang aller vier Symmetrieebenen geschnitten, so dass sich acht Teile ergeben. Jedes dieser kleinen Teile muss nun noch einmal geschnitten werden. Dazu wird es auf die durch die Punkte C,D und E festgelegte Fläche gelegt (Abb. 5.14). Die Kante CD dient

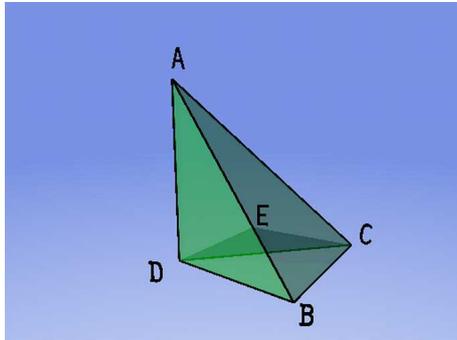


Abbildung 5.14: Letzter Schnitt (Ebene CDE) bei einem Ringglied des Sykora-Oktaeders

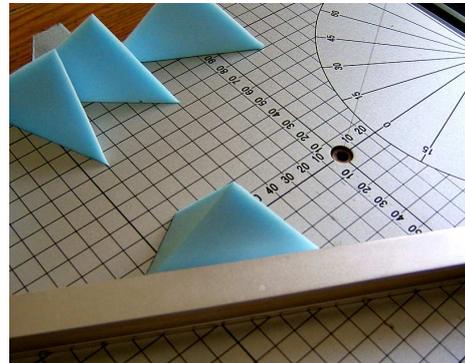


Abbildung 5.15: Der entsprechende Schnitt mit dem Thermocut am realen Ringglied

als Orientierung für den Schnitt, der mit senkrecht stehendem Scheidedraht ausgeführt wird (Abb.5.15). Von den kleinen Teilstücken werden für das Modell 18 Stück benötigt.

Für die beiden großen Riegelteile schneidet man die Pyramide nur entlang ihrer diagonal liegenden Symmetrieebenen. Dadurch erhält man vier solcher Teile, von denen zwei zu kleinen Teilstücken weiterverarbeitet werden können.

Die beiden Riegelkörper bestehen jeweils aus drei kleinen und einem großen Teilstück. Die kleineren Teile werden um das große Teilstück herum angeordnet, so dass sie sich an den längsten Kanten berühren. An diesen Kanten werden sie mit Sporttape beweglich verbunden. Dadurch wird der Riegel beweglich und kann auch in der Negativform den umgestülpten Körper ergänzen.

Der Umstülpgürtel setzt sich aus zwölf kleinen Teilstücken zusammen. Diese werden zunächst paarweise an den kürzesten Kanten symmetrisch miteinander verbunden - so entstehen die Flächenmittengelenke - und danach werden die Paare an den längsten Kanten zusammengeklebt. Dadurch entstehen die Kantengelenke. Der entstehende Ring ist erstaunlich eingeschränkt in seiner Bewegung und hat zwei geschlossene Ebendurchgänge, bei denen sich alle Teile in der Mitte berühren (siehe dazu auch die Abbildungen in Abschnitt 2.2.2).

Bevor das Modell mit farbiger Folie umhüllt wird, werden die Magnete eingebaut. Diese sind für die korrekte (und problemlose) Führung des Umstülpungsgürtels notwendig und ermöglichen auch eine stabile Negativform, welche ohne Magnete von einer Person allein kaum zusammengesetzt werden kann.



Abbildung 5.16: Einbau der Magnete und ihrer Gegenstücke am Gürtel

Jedes Paar von Gürtelteilen, das durch ein Flächenmittengelenk miteinander verbunden ist, wird durch zwei Magnete (oder einen Magneten und ein Stück Metall, z.B. eine Unterlagsscheibe) fixiert. Diese werden an den Flächen angebracht, die sich in der Grundstellung des Gürtels berühren (siehe Abb. 5.16). Damit können drei der sechs Flächenmittengelenke während der ersten Hälfte der Umstülpung starr bleiben, was den Forderungen an die Platonische Umstülpungsbewegung entspricht. Außerdem bleibt der Gürtel in der Grundstellung und in der Negativform stabil.

Zusätzlich werden Magnete zur Verbindung von Gürtel und Riegel eingebaut. Sie werden auf jeweils drei nicht direkt benachbarten Berührungsflächen zwischen Gürtel und Riegel angebracht. Es ist zu empfehlen, die Magnete überall gleich anzuordnen, damit die beiden Riegel austauschbar sind (im hier gebauten Modell ist dies nicht der Fall, daher wurden sie durch unterschiedlich gemusterte Folien gekennzeichnet) und damit die Riegel auch um 120° verdreht eingesetzt werden können. Wegen der Symmetrie der Teile ist eine Drehung der Riegel um 120° nicht zu erkennen, und wenn die Magnete nicht gleich angeordnet sind, kann das zu schlechterem Halt oder sogar zu einer Abstoßung führen.

Sind die Magnete an ihrer Position, so kann das Modell fertig umhüllt werden; die Klebefolie hält die Magnete an ihren Plätzen. Mit Hilfe der Magnete lässt sich das Modell sehr leicht führen. Auch die Bildung der Negativform gelingt mühelos.

5.2.4 Der Cubus X von Hartmut Endlich

Dieses Modell ist auch im Handel erhältlich. Wegen seiner zahlreichen Formverwandlungen ist es sehr beliebt. Es handelt sich ebenso wie das in Abschnitt 2.2.3 vorgestellte Oktaeder um ein Modell der Ganzheitlichen Umstülpung. Alle zwölf Teile des Körpers sind in einem Gelenkring miteinander verbunden.

Als Kantenlänge für dieses Modell wurde 8 cm gewählt. Dies entspricht genau der Dicke der als Material verwendeten Dämmplatten. Die zueinander kongruenten Teilstücke können dann alle aus einem einzigen Würfel mit dieser Kantenlänge geschnitten werden. Ein einzelnes Teilstück entspricht einer diagonal halbierten quadratischen Pyramide, deren Höhe halb so groß wie ihre Grundkante ist (siehe Abb. 5.17).

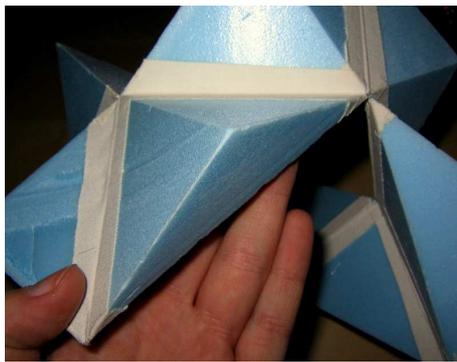


Abbildung 5.17: Ringglied eines Cubus X, bestehend aus einer diagonal halbierten quadratischen Pyramide

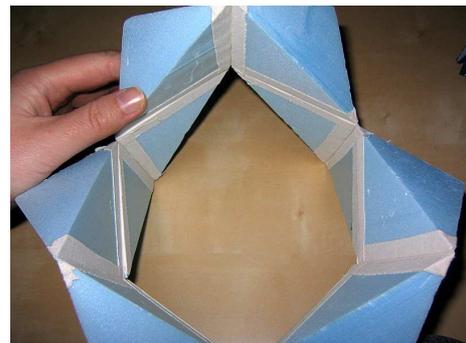


Abbildung 5.18: Gelenkverbindungen im Cubus X. Die Ringglieder werden mäanderförmig angeordnet

Um aus dem Würfel solche Teile zu erhalten, muss dieser zunächst entlang einer seiner diagonal verlaufenden Symmetrieebenen geschnitten werden. Der Schneiddraht wird dazu im 45° -Winkel eingestellt. Die beiden entstehenden Teile haben jeweils noch zwei quadratische Flächen. Man schneidet jedes dieser Teile wieder entlang einer diagonalen Symmetrieebene des ursprünglichen Würfels, dass eine dieser beiden Flächen diagonal halbiert wird. Die beiden resultierenden Teile haben nun jeweils noch drei Kanten des ursprünglichen Würfels, wobei die mittlere Kante als einzige von zwei gleichschenkligen Dreiecken umgeben ist. Auch durch diese Kante verläuft eine diagonale Symmetrieebene des Würfels, entlang der nun geschnitten wird. Nach diesem Schritt erhält man die beschriebenen Pyramidenhälften.

Die Verbindung der Teile erfolgt mäanderförmig (siehe Abb. 5.18). Die einzelnen Glieder werden an den ursprünglichen Würfelkanten miteinander verbunden. Bemerkenswert dabei ist, dass sich bedingt durch diese Gelenkanordnung jeweils drei aufeinanderfolgende Gelenke in einem Punkt schneiden. Der entstehende zwölfteilige Ring ist trotz seiner vielen Gelenke nicht so frei beweglich, wie man vermuten könnte. Die Größe der Ringglieder und eben die Anordnung der Gelenke schränken die Beweglichkeit deutlich ein, so dass unter anderem keine symmetrische Umstülpbewegung möglich ist; der Ring muss „schrittweise“ umgestülpt werden. Dennoch lassen sich mit dem Cubus X zahlreiche Formen bilden (siehe Abb. 5.19), darunter auch ein Rhombendodekaeder als vollständige Hüllform mit einem würfelförmigen Hohlraum im Inneren.

Magnete werden nicht unbedingt benötigt, ermöglichen aber eine stabile Negativform. Diese lässt sich auch ohne Magnete leicht zusammensetzen, muss dann aber festgehalten werden. Zu Fixierung der Negativform genügt es, zwei Teile, die in einer Würfel­fläche liegen, entlang ihrer diagonalen Berührfläche mit Magneten zu versehen und das gleiche mit den beiden Teilen in der gegenüberliegenden Würfel­fläche zu wiederholen. Das im Rahmen der Arbeit gebaute Modell besitzt keine Magnete.

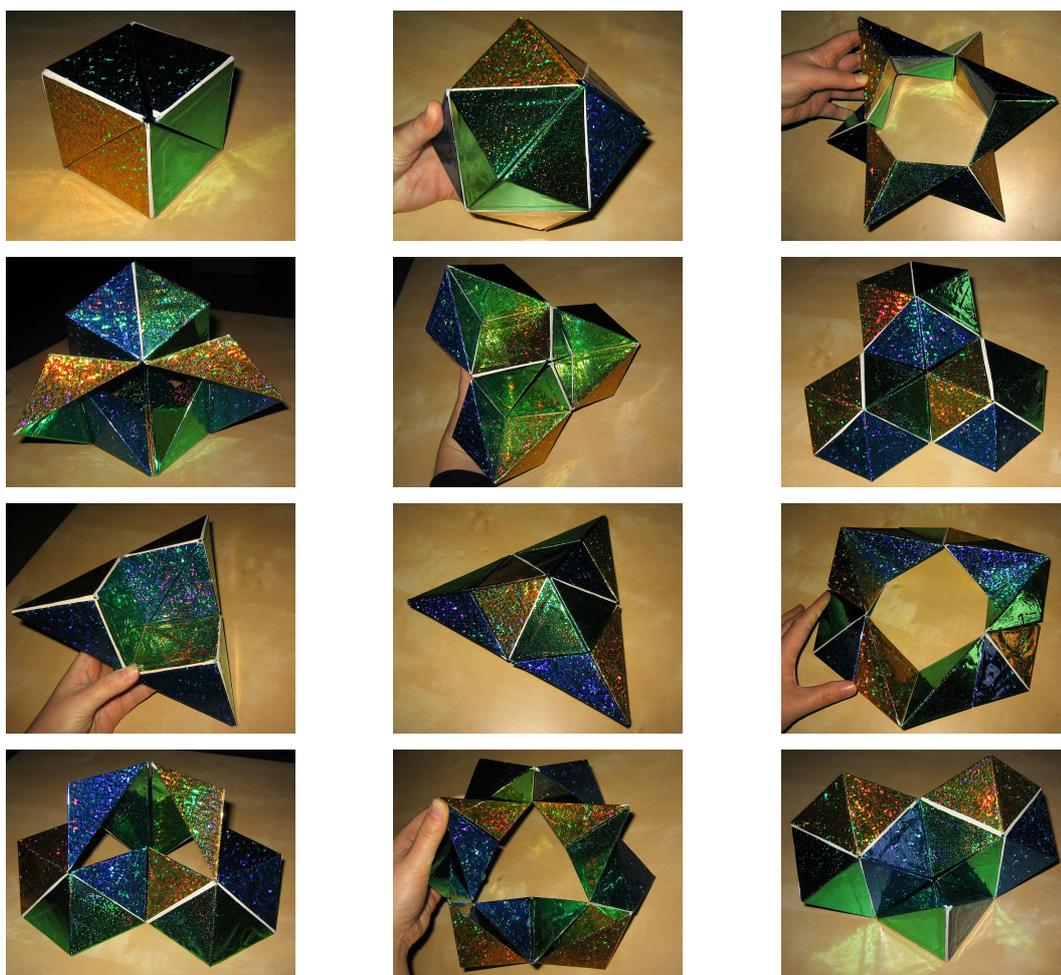


Abbildung 5.19: Verschiedene Formen des Cubus X. Das erste Bild zeigt die Grundstellung, das zweite die vollständige Umstülpung in ein Rhombendodekaeder mit einem würfelförmigen Hohlraum im Inneren. Die weiteren Figuren sind nur einige wenige Beispiele; nach Angaben von KulturatA e.V. sollen über 200 Formen möglich sein.

5.2.5 Der V Kubus von Fred Voß

Die hinter diesem Modell stehende Konstruktionsidee wird bereits in Abschnitt 2.2.3 beschrieben. Ähnlich wie der Cubus X können auch die Teile des V Kubus aus einem einzigen Würfel geschnitten werden; als Kantenlänge wurde hier wieder 8 cm gewählt.

Vor dem Schneiden werden zwei gegenüberliegende Ecken markiert. Danach werden die Mittelpunkte aller Verbindungskanten der übrigen Ecken markiert und miteinander verbunden. Auf diese Weise ergibt sich das in Abschnitt 2.2.3 beschriebene ebene Sechseck im Würfel. Aus dem Würfel wird nun zunächst der diamantähnliche Körper geschnitten, indem die nicht markierten Würfecken abgeschnitten werden. Der Schnittwinkel beträgt rund $70,5^\circ$, und die Schnittebene an einer Ecke verläuft durch die benachbarte markierte Ecke und durch die eingezeichnete Verbindungsstrecke der benachbarten Kantenmitten (siehe auch Abb. 5.20).

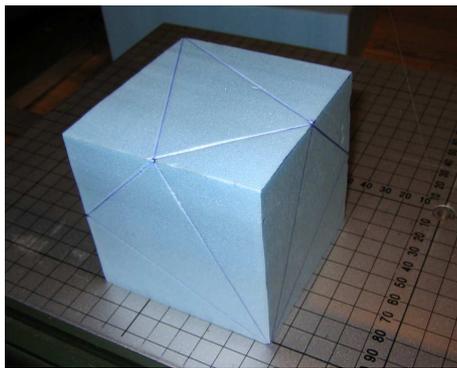


Abbildung 5.20: Mit Schnittlinien markierter Rohwürfel zum Schneiden des V Kubus

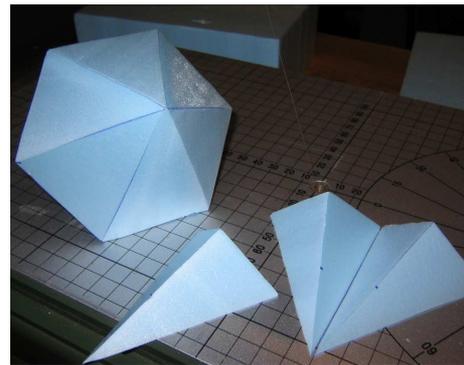


Abbildung 5.21: Der Diamantkörper des V Kubus und einige der abgeschnittenen Teile

Die dabei entstehenden kleinen Tetraeder müssen noch entlang der ursprünglichen Würfelkante halbiert werden. So erhält man die kleineren Ringglieder. Für die größeren Elemente muss der Diamantkörper (siehe Abb. 5.21) entlang sämtlicher Symmetrieebenen geschnitten werden. Dazu schneidet man zuerst entlang der drei flächenhalbiierenden Symmetrieebenen. Man erhält so sechs Körper, die noch entlang der erhabenen Kanten halbiert werden müssen. Um diesen Schritt sauber durchzuführen, müsste man den Winkel des Schneidedrahts auf 30° einstellen. Dies ist aber schwierig, da der Draht dann sehr flach gespannt wird und beim Erhitzen leicht reißen kann. Abhilfe kann man schaffen, indem man einen Winkel von 60° einstellt, aus einem zusätzlichen Quader einen Keil mit 30° -Winkel abschneidet und die-



Abbildung 5.22: Beim V Kubus schneiden sich 5 benachbarte Gelenkachsen in einem Punkt

sen unter den zu halbierenen Körper legt. Letzterer kann dann bequem mit einem Schnittwinkel von 60° halbiert werden.

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, die Teile zu verbinden (siehe Abschnitt 2.2.3). Für dieses Modell wurde die zweite Verbindungsmöglichkeit gewählt, bei der sich jeweils fünf aufeinanderfolgende Gelenkachsen in einem Punkt schneiden (Abb. 5.22). Wie schon beim Cubus X ersichtlich, wird die Beweglichkeit eines Rings umso mehr eingeschränkt, je mehr aufeinanderfolgende Gelenkachsen sich in einem Punkt schneiden. Daher ist dieser Ring trotz seiner 24 Elemente vergleichsweise leicht zu führen. Im Gegensatz zum Cubus X lässt sich der V Kubus symmetrisch umstülpen; der Gelenkring zeigt bei sauberer Führung ein harmonisches Bewegungsverhalten. Magnete werden nicht unbedingt benötigt, könnten aber an geeigneten Stellen die Führung des Rings unterstützen, zum Beispiel auf der Berührfläche der kleineren Teile.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In den vorangegangenen Kapiteln wurden zahlreiche Varianten der Umstülpung Platonischer Körper einander gegenübergestellt sowie Möglichkeiten zu deren Darstellungen erörtert. Die Vielfalt der verschiedenen Umstülpkörper zeigt vor allem, dass das Resultat eines Umstülpungsansatzes maßgeblich davon abhängt, welchen Forderungen die Umstülpung genügen soll und welchen Aspekt einer Umstülpung man in den Vordergrund stellt.

So gelangt Klaus Ernhofer mit seiner Suche nach zwangläufigen Ringen in den Platonischen Körpern zu einer Reihe von Modellen, deren Status als „Umstülpkörper“ insofern umstritten ist, als dass weder während der Umstülpung ein Bezug zum Platonischen Körper hergestellt wird, noch eine umgestülpte Hüllform erreicht werden kann. Der eigentliche Umstülpkörper, bei dem sich Inneres nach außen bewegt, ist der in den Platonischen Körper eingebettete Gelenkring. Allerdings hat Ernhofer ja auch gezielt nach sechsgliedrigen Ringen gesucht; seine Kriterien waren der Zwanglauf und die Forderung nach einer teilweisen Verwendung der Außenflächen des Körpers, nicht jedoch eine Umstülpung im ganzheitlichen, ästhetischen Sinne.

Diesen völlig anderen Ansatz verfolgt die Familie Sykora, welche die Idee des Platonischen Körpers und dessen Umstülpung in eine Negativform in den Vordergrund hebt. Darüber hinaus soll auch während der Umstülpbewegung der Platonische Körper aus dem Ring konstruierbar sein; hierzu ist unter anderem die Einbeziehung unendlich ferner Elemente aus der Projektiven Geometrie sinnvoll (vgl. [1, Kap.6] und [5]). Um diese erwünschten Eigenschaften der Platonischen Umstülpung zu erreichen, müssen sehr strenge Forderungen gestellt werden. Bei manchen Körpern sind diese Forderungen jedoch so eng, dass noch kein Modell gefunden wurde, das allen gleichzeitig in vollem Ausmaß genügt (z.B. beim Dodekaeder). Die Entnahme von Riegelkörpern ist ähnlich wie bei Ernhofer nicht zu umgehen, sie wird aber



Abbildung 6.1: Der Würfel von Paul Schatz, ein Umstülpkörper mit Zwanglauf

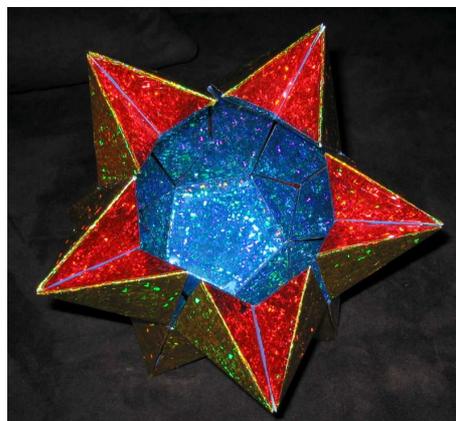


Abbildung 6.2: Das Dodekaeder von Wolfgang Maas, ein Platonischer Umstülpkörper

von den Autoren ausdrücklich nicht als Mangel betrachtet, da die Verletzung des Platonischen Körpers nur als scheinbar erachtet wird. Der Begriff der Ganzheitlichkeit steht nach Ansicht der Autoren nicht im Widerspruch zur Wegnahme von Riegeln. Er bezieht sich vielmehr auf die Tatsache, dass zu jedem Zeitpunkt der Umstülpungsbewegung der Körper ideell ergänzt werden kann.



Abbildung 6.3: Der Cubus X, ein ganzheitlicher Umstülpkörper von Hartmut Endlich

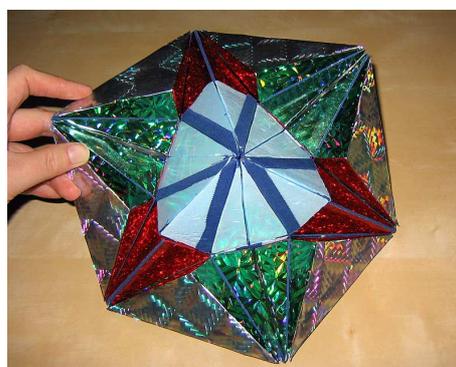


Abbildung 6.4: Der V Kubus, ein ganzheitlicher Umstülpkörper von Fred Voß

Die Ganzheitliche Umstülpung distanziert sich von diesen beiden Ansätzen, indem sie den gesamten Körper in den entstehenden Gelenkring miteinbezieht und keine Riegelkörper entfernen lässt. Ausgehend von dieser sehr allgemeinen Vorschrift haben sich verschiedene Richtungen entwickelt. Hartmut Endlich beispielsweise ar-

beitet mit Ringen aus lauter kongruenten Elementen auf eine Umstülpung zur vollständig umschlossenen Hüllform hin. Dabei bedient er sich der Symmetrieebenen des Körpers, um diesen in die Ringglieder aufzuteilen. Alle Elemente des Körpers treffen sich bei seinen Modellen im Mittelpunkt. Dagegen sucht Fred Voß symmetrische Gelenkringe mit harmonischem Bewegungsverhalten, die bestimmte Teile des Körpers wie z.B. die Raumdiagonale unangetastet lassen. Die Aufteilung des Körpers erfolgt bei seinen Modellen neben Symmetrieebenen auch durch besondere Eigenschaften des Körpers (wie etwa das in den Würfel eingebettete reguläre, ebene Seckseck). Im Gegensatz zu Endlich lässt Voß auch Gelenkringe mit mehr als einem Element zu; die meisten seiner Gelenkringe weisen zwei verschiedene Elemente sowie deren Spiegelungen auf.

Das Gebiet der Umstülpung Platonischer Körper ist offenbar noch nicht vollständig erforscht. Je nach dem, welche Forderungen gestellt werden, können verschiedenste Gelenkringe aus den Platonischen Körpern entstehen, und ein und die selbe Aufteilung eines Körpers liefert mitunter verschiedene Gelenkringe - je nach dem, wie die Glieder miteinander verbunden werden. Es bleibt also viel Raum für weitere Erkundungen auf diesem Gebiet.

Die Animation von Umstülpkörpern ist aufwendig, kann aber eine wertvolle Alternative zu konkreten Modellen sein, da solche nicht immer verfügbar sind. Zur Visualisierung solcher Körper ist eine genaue geometrische Erfassung ihrer Bewegung nötig. Auch hier ist noch einiges offen. Insbesondere die Erfassung der Bewegung von größeren Ringen, wie sie beispielsweise bei der Platonischen Umstülpung oder bei der ganzheitlichen Umstülpung auftreten, gestaltet sich mit den hier verwendeten Ansätzen schwierig.

Das Kapitel über die praktische Herstellung von Umstülpkörpern soll zum Nachbauen anregen. Konkrete Modelle sind immer noch die effektivste Methode, Umstülpkörper zu verstehen, denn so kann man mit den eigenen Sinnen die Umstülpbewegung erleben. Auch wenn der Aufwand für den Bau eines Modells mitunter hoch ist, das Ergebnis ist bei sorgfältiger Arbeit ein Stück lebendige Mathematik, das nicht nur den Kenner fasziniert.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Ellen Pawlowski, geb. am 31.08.1982 in Homburg/Saar an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ohmbach, 26.11.2008

Literaturverzeichnis

- [1] **Ernhofer, Klaus u. Maas, Wolfgang**
Umstülpbare Modelle der Platonischen Körper
Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum, Dornach (Schweiz)
2000

- [2] **Byrnes, Robert**
Metamorphs – Transforming Mathematical Surprises
Tarquin Publications 2004

- [3] **Ziegler, Renatus**
Platonische Körper – Verwandtschaften, Metamorphosen, Umstülpungen
Katalog mit einführenden Texten und ergänzenden Materialien zur Ausstellung vom 26. September bis 28. Oktober 1998 im Goetheanum, Dornach, Schweiz. Mit Beiträgen von Helmut Emde, Hartmut Endlich, Klaus Ernhofer, Wolfgang Maas. Zweite, ergänzte und korrigierte Auflage.

- [4] **Schottler, Peter**
Umstülp-Zeit – Einführung in den Umgang mit Umstülp-Phänomenen und Umstülp-Objekten
Hrsg: KulturatA e.V., Wuppertal 2004

- [5] **Maas, Wolfgang u. Sykora, Immo**
Umstülpmodelle der Platonischen Körper
2. erweiterte und neu gestaltete Auflage. Werkstatt für Platonische Körper, Kaspar Hauser Therapeutikum, Berlin 1993

- [6] **Schatz, Paul**
Rhythmusforschung und Technik
Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1998

- [7] **Voß, Fred**
Mündliche Mitteilungen per Telefon im Oktober 2008

- [8] **Maas, Wolfgang**
Das Tetraeder von Franz Sykora
vorgestellt von Wolfgang Maas und Immo Sykora, 2. Auflage. Kaspar Hauser
Therapeutikum, Werkstatt für Platonische Körper, Berlin 1996
- [9] **Maas, Wolfgang**
Das umstülpbare Oktaeder von Friedemann und Immo Sykora
vorgestellt von Wolfgang Maas. Kaspar Hauser Therapeutikum, Werkstatt für
Platonische Körper, Freiburg [u.a.] 1995
- [10] **http://www1.ttcn.ne.jp/a-nishi/y_cube/z_y_cube.html**
Japanische Internetseite mit Bildern und Informationen über den Sternenwür-
fel von Yoshimoto am 03.11.2008.
- [11] **http://www.ac-noumea.nc/math/amc/polyhedr/foldcub_.htm**
Internetseite aus Nouvelle-Calédonie (Süd-Pazifik) mit Animationen des
Yoshimoto-Würfels und seiner Variationen am 03.11.2008.
- [12] **<http://www.fzk.at/>**
Internetseite aus Österreich über den Würfel von Paul Schatz am 20.10.2008.
- [13] **<http://www.ez-algae.com/oloid/index.htm>**
Internetseite zur Oloid-Technologie am 04.11.2008.
- [14] **<http://www.paul-schatz.ch/de/index.htm>**
Internetseite der Paul-Schatz-Stiftung am 31.10.2008.