Les Kaléïdocycles de M.C.Escher

Marcus Engel, le 7 mai 2003
traduit de l'anglais par Maurice Starck

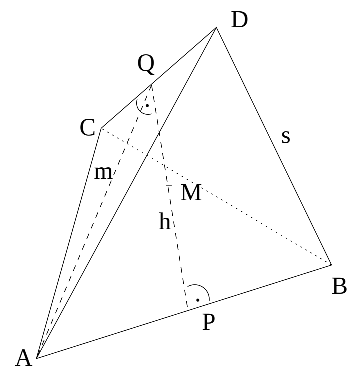
Le but de ce texte est de répondre à quelques questions qui se posent à propos des kaléïdocycles : Quelles doivent être les propriétés des tétraèdres pour que l'on puissent les utiliser pour réaliser des anneaux tournant sur eux-mêmes ? Comment la rotation d'un tel anneau peut-elle être décrite mathématiquement ? Pour quels nombres de tétraèdres existe-t-il des kaléïdocycles ? De plus nous voulons décrire brièvement quelques cas particuliers de kaléïdocycles.

Kaléïdocycles réguliers

D'abord nous ne considérerons que les kaléïdocycles formés de tétraèdres réguliers.

I. Soient A, B, C, D les sommets d'un tétraèdre régulier, P le milieu de l'arête $[AB]$ et Q le milieu de l'arête $[CD]$, et enfin M le milieu de $[PQ]$ (alors M est aussi le centre de gravité du tétraèdre). On a alors :

$$AB \perp PQ \perp CD \perp AB. \tag{1}$$



On désigne par s la longueur des arêtes du tétraèdre. Soit m la hauteur des faces (triangles équilatéraux) et $h := \overline{PQ}$. On a alors :

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2 = m^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

et il vient

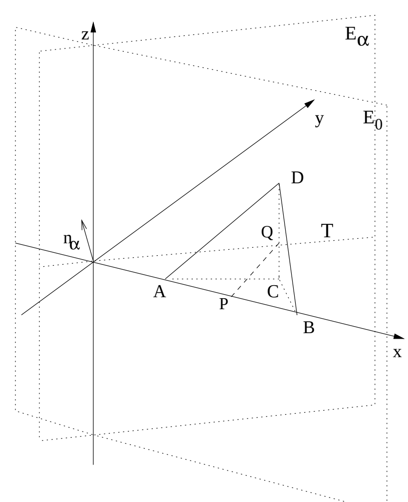
$$s = h\sqrt{2}. \tag{2}$$

II. Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 8$,

$$E_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$$

le plan (xOz), où O désigne l'origine. Soit $\alpha := \frac{2\pi}{n}$ (alors $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ puisque $n \geq 8$) et

$$\begin{aligned} E_\alpha &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x \tan\alpha\} \\ \vec{n}_\alpha &:= (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0). \end{aligned}$$



Les plans E_α et E_0 se coupent selon l'axe (Oz) et leur angle est alors α. Le vecteur $\vec{n}_\alpha$ est le vecteur normal au plan E_α.

III. Supposons qu'un tétraèdre régulier T (notations comme dans I.) est positionné de la manière suivante :

i) A, B, P, Q sont dans le plan (xOy)

ii) $A, B, P \in E_0$

iii) $C, D, Q \in E_\alpha$

vi) C, D, Q ont des coordonnées positives en y

Un tel tétraèdre existe et est déterminé de manière unique car $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ et (1) (pour h donné). De plus A a une coordonnée positive en x, en effet

$$\overline{AP} = \frac{s}{2} = \frac{h}{2}\sqrt{2} < h \leq \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{\overline{PQ}}{\tan\alpha} = \overline{OP}$$

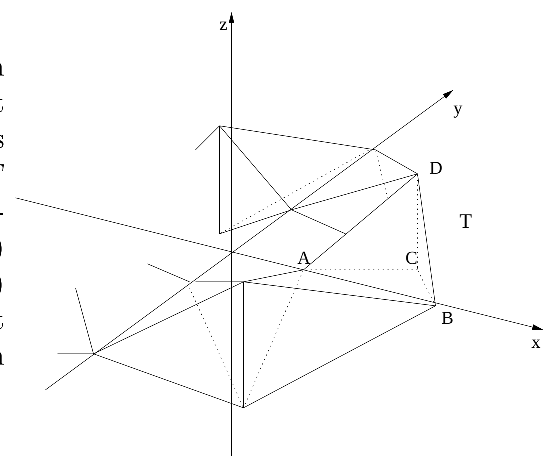
(on a $0 < \tan\alpha \leq 1$ car $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$).
Notons aussi que :

$$\text{les vecteurs} \quad \overrightarrow{AB},\ \vec{n}_\alpha,\ \overrightarrow{CD} \quad \text{forment un repère orthogonal direct,} \tag{3}$$

$$\text{les vecteurs} \quad \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{QP} \quad \text{forment un repère orthogonal direct} \tag{4}$$

En V. nous verrons qu'un tétraèdre positionné comme ci-dessus peut tourner autour de l'axe PQ sans violer les conditions ii),iii) et iv) (bien évidemment, les points P et Q se déplacent alors dans les plans E_0 et E_α).

IV. En plus de $n \geq 8$ posons n pair. La réflexion du tétraèdre T par rapport au plan E_α conduit à un autre tétraèdre T_2 qui partage les sommets C et D avec T. Par rotations successives de T et T_2 autour de l'axe (Oz) d'un angle 2α on obtient d'autres tétraèdres (en tout n tétraèdres) qui forment (puisque n est pair et $\alpha = \frac{2\pi}{n}$) un anneau fermé (deux tétraèdres voisins ont une arête commune). Cet anneau est appelé un kaléïdocycle régulier.



V. Nous allons maintenant montrer comment un tétraèdre T peut tourner entre les plans E_0 et E_α de manière à ce que les conditions ii),iii) et iv) de III. restent réalisées. Alors, par symétrie, il en résultera qu'un anneau de tétraèdres assemblé comme en IV. peut être tourné sur lui-même (des tétraèdres voisins partagent une arête commune, et cette propriété est préservée).

Nous choisissons le paramètre $t \in [0, 2\pi[$ pour décrire la rotation du tétraèdre T ; t indiquant l'angle courant entre $\overrightarrow{AB}$ et l'axe positif (Ox).
Notons par $A_t, B_t, C_t, D_t, P_t, Q_t$ les positions des points correspondant au temps $t \in [0, 2\pi[$.

Ainsi

$$\vec{u} := \frac{\overrightarrow{A_tB_t}}{\|\overrightarrow{A_tB_t}\|} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \in E_0.$$

Par (1), (3) on obtient ($\times$ désigne le produit vectoriel)

$$\begin{aligned} \vec{v} \ &:= \ \frac{\overrightarrow{C_tD_t}}{\|\overrightarrow{C_tD_t}\|} = \frac{1}{\|\vec{u}\times\vec{n}_\alpha\|}(\vec{u}\times\vec{n}_\alpha) \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t\cos^2\alpha}} \begin{pmatrix} -\sin t\cos\alpha \\ -\sin t\sin\alpha \\ \cos t\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t\tan^2\alpha}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\sin t\tan\alpha \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \in E_\alpha \end{aligned}$$

De plus, posons

$$\begin{aligned} \vec{w} \ &:= \ -(\vec{u}\times\vec{v}) \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t\cos^2\alpha}} \begin{pmatrix} -\sin^2 t\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \sin t\cos t\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t\tan^2\alpha}} \begin{pmatrix} -\sin^2 t\tan\alpha \\ 1 \\ \cos t\sin t\tan\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ainsi $\|\vec{w}\| = 1$).

Par (1) et (4) on a $h\vec{w} = \overrightarrow{P_tQ_t} = Q_t - P_t$, que nous pouvons écrire sous la forme

$$h\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Compte tenu du fait que $P_t \in E_0$ et $Q_t \in E_\alpha$ (i.e. $p_2 = 0$ et $q_2 = q_1\tan\alpha$) on obtient

$$q_2 = hw_2, \qquad q_1 = h\frac{w_2}{\tan\alpha}, \qquad p_1 = q_1 - hw_1 = h(\frac{w_2}{\tan\alpha} - w_1).$$

Nous imposons au milieu M de $[P_tQ_t]$ de rester dans le plan (xOy). Comme q_3 et w_3 ont le même signe, il vient

$$q_3 = -p_3 = h\frac{w_3}{2}.$$

Finalement nous avons (avec w défini ci-dessus)

$$P_t = h\begin{pmatrix} \frac{w_2}{\tan\alpha} - w_1 \\ 0 \\ -\frac{w_3}{2} \end{pmatrix} \quad \in E_0, \qquad Q_t = h\begin{pmatrix} \frac{w_2}{\tan\alpha} \\ w_2 \\ \frac{w_3}{2} \end{pmatrix} \quad \in E_\alpha$$

et A_t, B_t, C_t, D_t sont définis par

$$\begin{aligned} A_t &= P_t - \frac{h}{2}\sqrt{2}\vec{u}, \qquad B_t = P_t + \frac{h}{2}\sqrt{2}\vec{u}, \\ C_t &= Q_t - \frac{h}{2}\sqrt{2}\vec{v}, \qquad D_t = Q_t + \frac{h}{2}\sqrt{2}\vec{v}. \end{aligned}$$

En particulier $A, B \in E_0$ et $C, D \in E_\alpha$.

VI. Une autre possibilité pour décrire la position du tétraèdre au temps t est donnée par la transformation affine

$$\begin{aligned}\Phi_t \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & v_1 \\ u_2 & w_2 & v_2 \\ u_3 & w_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{w_2}{\tan\alpha} - \frac{w_1}{2} \\ \frac{w_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par Φ_t tous les points d'un tétraèdre centré sur l'origine et vérifiant

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

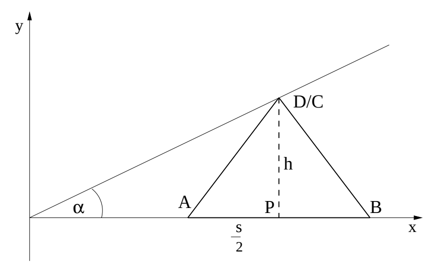
sont envoyés sur les points correspondants d'un tétraèdre qui se trouve dans la position qu'il occuperait au temps t.

VII. Nous avons supposé n pair et $n \geq 8$. Pour $n \leq 6$ il n'existe pas de kaléïdocycle régulier capable de tourner sur lui-même :

Considérons un kaléïdocycle de n tétraèdres (n pair) au temps $t = 0$. Soit p_1 la coordonnée en x de P. De manière évidente

$$p_1 \geq \frac{s}{2} = \frac{h}{2}\sqrt{2}$$

doit être vérifié, sinon plusieurs tétraèdres se couperaient en l'origine.



Maintenant $p_1 = \frac{h}{\tan\alpha}$ et puisque $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ nous obtenons la condition

$$\tan\frac{2\pi}{n} \leq \sqrt{2}$$

qui, pour n pair, n'est vérifiée que pour $n \geq 8$. Il en résulte que des kaléïdocycles constitués de tétraèdres réguliers doivent avoir au moins 8 composants pour être capables de tourner sur eux-mêmes. Un kaléïdocycle régulier avec 6 tétraèdres peut être assemblé, mais ne peut pas être amené dans la position $t = 0$; il ne peut donc pas tourner complètement sur lui-même. Et il est évident qu'il faut au moins 6 tétraèdres pour construire un kaléïdocycle.

Dans le cas $n = 6$ il est néanmoins possible d'obtenir un kaléïdocycle capable de tourner sur lui-même si on utilise des tétraèdres non réguliers. Davantage sur ce sujet dans la partie suivante.

Kaléïdocycles normaux

VIII. En s'appuyant sur la partie précédente qui traite de kaléïdocycles réguliers, nous montrons ci-dessous comment toute une classe de kaléïdocycles peut être définie par l'introduction de certains paramètres.

Nous utilisons les mêmes notations que précédemment. En particulier soit n pair et $n \geq 6$, et $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Nous avons vu que les positions des sommets A, B, C, D (nous omettons maintenant l'indice t) d'un tétraèdre régulier dans un kaléïdocycle régulier sont déterminées par les positions des points P et Q ainsi que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (qui représentent les directions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$):

$$A = P - \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{u}, \qquad B = P + \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{u},$$
$$C = Q - \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{v}, \qquad D = Q + \frac{h\sqrt{2}}{2}\vec{v}.$$

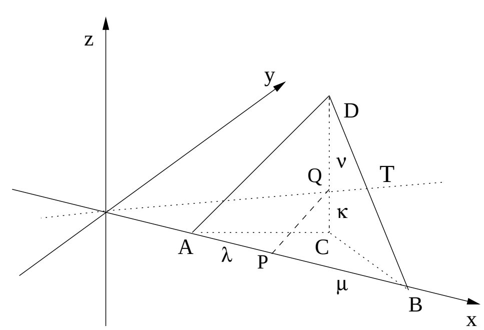
Les vecteurs normés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont été multipliés par $\frac{h\sqrt{2}}{2}$ de manière à ce que $ABCD$ soit régulier.

Si au lieu de cela nous posons maintenant

$$A = P - \lambda\vec{u}, \qquad B = P + \mu\vec{u},$$
$$C = Q - \kappa\vec{v}, \qquad D = Q + \nu\vec{v}.$$

avec des valeurs arbitraires $(\lambda, \mu, \kappa, \nu) \in \mathbb{R}^4$, alors $ABCD$ est encore un tétraèdre (non nécessairement régulier), avec

$$A, B \in E_0,$$
$$C, D \in E_\alpha.$$



En plaçant d'autres tétraèdres équivalents à $ABCD$ de la même manière qu'en IV. nous obtenons à nouveau un anneau fermé où des tétraèdres voisins partagent une arête commune.

Pour qu'un tel kaléïdocycle puisse tourner sur lui-même, on doit avoir

$$|\lambda|, |\mu|, |\kappa|, |\nu| \leq \frac{h}{\tan\alpha}$$

(sinon il y aurait des positions du kaléïdocycle pour lesquelles plusieurs tétraèdres se couperaient à l'origine, voir VII.)

Ces restrictions étant faites pour les paramètres, il y a encore différentes configurations qui conduisent au même kaléïdocycle (les configurations $(\lambda, \mu, \kappa, \nu)$, $(\kappa, \nu, \lambda, \mu)$ and $(\mu, \lambda, \nu, \kappa)$ par exemple sont identiques). Nous pouvons donc restreindre davantage les valeurs des paramètres. Il est facile de voir que la définition suivante couvre toutes les configurations différentes :

Un kaléïdocycle de n composants construit par symétrie à partir d'un tétraèdre $ABCD$ avec

$$\begin{aligned} A &= P - \lambda\vec{u}, \qquad & B &= P + \mu\vec{u}, \\ C &= Q - \kappa\vec{v}, \qquad & D &= Q + \nu\vec{v}. \end{aligned}$$

où

$$\lambda, \kappa \in [0, \frac{h}{\tan\alpha}], \quad \mu \in [-\lambda, \lambda], \quad \nu \in [-\kappa, \kappa],$$

est appelé un kaléïdocycle normal. Notation : $K_n(\lambda, \mu, \kappa, \nu)$.

Remarque : D'après la définition de $P, Q, \vec{u}, \vec{v}$ nous voyons que les tétraèdres composant des kaléïdocycles normaux ont la propriété suivante (cruciale dans notre contexte) : deux arêtes opposées AB et CD et leur perpendiculaire commune sont deux à deux orthogonales.

Kaléïdocycles spéciaux

En utilisant les paramètres $n, \lambda, \kappa, \mu, \nu$ on peut désigner une grande variété de kaléïdocycles de formes et de types différents. Nous voudrions conclure en mentionnant quelques configurations spéciales intéressantes car les kaléïdocycles correspondants ont des propriétés géométriques supplémentaires.

IX. Pour $\lambda = \mu, \kappa = \nu$ on obtient des kaléïdocycles isocèles, toutes les faces de ces kaléïdocycles sont des triangles isocèles. On y trouve

- les kaléïdocycles réguliers avec la configuration $n \geq 8, \lambda = \mu = \kappa = \nu = \frac{h}{2}\sqrt{2}$ (traitée ci-dessus),
- les kaléïdocycles fermés avec la configuration $\lambda = \mu = \kappa = \nu = \frac{h}{\tan\alpha}$, qui ont la propriété qu'aux temps $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi, t = \frac{3\pi}{2}$ des sommets des tétraèdres sont confondus en l'origine, et donc l'"oeil" de l'anneau se ferme pour ces positions.

X. Pour $\mu = \nu = 0$ on obtient kaléïdocycles rectangles, i.e. toutes les faces sont des triangles rectangles. Il convient de mentionner

- le cube retournable défini par la configuration $n = 6, \lambda = \mu = \frac{h}{\tan\alpha}, \mu = \nu = 0$. Le nom vient du fait qu'au temps $t = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ ce kaléïdocycle devient un cube si on prolonge les arêtes AB et CD (et de même les arêtes correspondantes des autres tétraèdres).