

# Les formes fractales dans la nature

<b>INTRODUCTION :</b> .....	<b>2</b>
<b>I. LA THÉORIE DES FRACTALES.....</b>	<b>3</b>
A. ORIGINE DE LA THÉORIE.....	3
1. <i>Historique</i> .....	3
2. <i>La côte de Grande-Bretagne</i> .....	3
B. UN OBJET FRACTAL, QU'EST-CE QUE C'EST?.....	4
1. <i>Introduction</i> .....	4
2. <i>Les objets fractals</i> .....	4
3. <i>Calcul de la dimension fractale</i> .....	5
4. <i>Les méthodes de l'analyse fractale</i> .....	6
C. ET DANS LA RÉALITÉ ?.....	8
1. <i>Universalité</i> .....	8
2. <i>Le rôle du hasard</i> .....	8
3. <i>La limite de l'invariance d'échelle</i> .....	9
<b>II. LES FORMES FRACTALES EN GÉOLOGIE.....</b>	<b>10</b>
A. LES CÔTES ROCHEUSES.....	10
1. <i>Le caractère fractal des côtes</i> .....	10
2. <i>La dimension D</i> .....	10
3. <i>Applications</i> .....	11
4. <i>Comment une côte rocheuse acquiert-elle un caractère fractal ?</i> .....	11
B. MONTAGNES.....	11
C. NUAGES.....	12
D. OXYDE DE MANGANÈSE.....	12
E. RÉSEAUX FLUVIAUX.....	13
<b>III. LES FORMES FRACTALES DANS LE MONDE VIVANT.....</b>	<b>14</b>
A. CHEZ LES VÉGÉTAUX.....	14
1. <i>Le chou romanesco et le chou-fleur</i> .....	14
2. <i>Les fougères</i> .....	15
3. <i>L'origine des formes fractales végétales</i> .....	15
4. <i>Les L-systèmes</i> .....	15
B. LES FRACTALES DANS LES POUMONS.....	16
1. <i>Introduction</i> .....	16
2. <i>Quelques généralités</i> .....	16
3. <i>La configuration des poumons</i> .....	16
C. COQUILLAGE ET TRIANGLE DE SIERPENSKI.....	18
<b>CONCLUSION :</b> .....	<b>19</b>
<b>ANNEXES :</b> .....	<b>20</b>
<b>Bibliographie :</b> .....	<b>22</b>

## Introduction :

Quels points communs y a-t-il entre un arbre, des nuages, une côte rocheuse, nos poumons, et encore bien d'autres objets de la nature ?

Jusque dans les années 1970 personne ne soupçonnait qu'une universalité puisse exister entre toutes ces formes de la nature. Les scientifiques se limitaient à la géométrie euclidienne pour les étudier. Cependant, grâce à la découverte par B. Mandelbrot de la théorie fractale qui étudie les objets complexes, une nouvelle description de ces formes naturelles a pu être établie, description parfois plus pertinente que celle donnée par la géométrie traditionnelle. La géométrie fractale a donc montré les limites de la géométrie euclidienne pour décrire des objets complexes, elle a offert de nouvelles perspectives aux sciences et de nombreuses applications.

Le terme « fractale » vient du latin « fractus » qui désigne un objet fracturé, de forme très irrégulière. C'est Mandelbrot qui a introduit ce terme pour désigner ces fameux objets mathématiques. L'adjectif fractal prend son pluriel en -als : « fractals », de la même façon que « banal » et les six autres exceptions du français auxquelles il vient s'ajouter. Le nom est au féminin, évitant toute ambiguïté.

Mandelbrot a formalisé la théorie fractale et son vocabulaire, la théorie s'est vite avérée utile dans de nombreuses disciplines, notamment dans la compréhension de certains phénomènes naturels.

En effet, les objets mathématiques purs de la théorie fractale ont des correspondances étonnantes avec certains phénomènes géologiques naturels ainsi qu'avec le monde vivant.

Où trouve-t-on des formes fractales dans la nature et comment sont-elles apparues ? Les réponses à ces questions ont été le fruit de nombreuses recherches que nous tenterons de synthétiser.

# I. La théorie des fractales

## A. Origine de la théorie

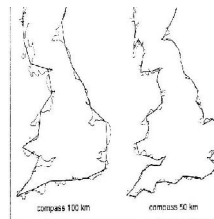
### 1. Historique

De nombreuses notions mathématiques ont d'abord été considérées comme des « monstres mathématiques », avant d'être domestiquées, offrant alors de nouvelles perspectives et de nombreuses découvertes. Il en a été ainsi chez les pythagoriciens avec l'apparition des nombres irrationnels, à la Renaissance avec celle des nombres négatifs et des nombres complexes, et au XIX<sup>ème</sup> siècle avec l'exigence de rigueur de plus en plus poussée qui remet en cause beaucoup d'énoncés admis jusque là sans démonstration.

Les objets fractals, eux aussi, ont pendant longtemps été considérés comme des monstres, et le sont encore parfois aujourd'hui.

De 1875 à 1925, l'idée se répandit que les mathématiciens comme Cantor, Peano, Von Koch, Hausdorff étaient faiseurs d'objets pathologiques : ils créaient des objets que la nature ne connaissait pas, remettant en question la géométrie euclidienne et les notions de fonction et de dimension.

Un exemple de monstre est l'existence mathématique de courbes continues ayant de nombreux points sans dérivée. Ces monstres ne trouvèrent alors ni théorie ni application.



### 2. La côte de Grande-Bretagne

En 1961, Lewis Fry Richardson s'intéresse à la mesure empirique de la côte de Grande-Bretagne : comment mesurer, avec une bonne précision, la longueur d'une côte comme celle de la Grande-Bretagne ?

La méthode la plus approximative consiste à mesurer la distance entre les deux extrémités de la côte : cette approximation est sûrement inférieure à la distance réelle (qui tient compte de la complexité du relief).

Richardson comprend que la meilleure méthode semble être de définir un étalon, par exemple une barre de 1 m de longueur, et de parcourir la côte en reportant bout à bout la barre et d'en compter le nombre d'occurrences d'un point à l'autre entre lesquels on veut estimer la longueur de la côte. Si on utilise une barre 10 fois plus petite, elle pourra pénétrer plus précisément dans les recoins dessinés par la côte, la longueur mesurée sera alors plus précise, donc plus longue. Si l'on utilise une barre de 1 micron, on pourra alors contourner jusqu'aux moindres grains de sable et la mesure en sera d'autant plus précise. Ainsi, plus l'étalon utilisé est petit, plus la longueur mesurée est précise et longue, un segment infiniment petit donnerait une distance infiniment grande. Lewis Fry Richardson établit ainsi que la longueur d'une côte en fonction d'un étalon de longueur  $n$  est proportionnelle à  $n^\alpha$ . La valeur de l'exposant  $\alpha$  dépend de la côte choisie. Aux yeux de Richardson,  $\alpha$  était sans signification particulière.

Dans les années 1970, c'est Benoît Mandelbrot, mathématicien français, qui donna un sens à  $\alpha$  en le définissant comme  $D$ , la dimension fractale. Mandelbrot élaborait la théorie fractale expliquant les monstres mathématiques des siècles précédents et ouvrant de nombreuses perspectives et applications. Cette dimension  $D$  permet entre autre de caractériser la complexité d'une côte ou de n'importe quel objet fractal, offrant un nouveau critère de comparaison plus pertinent que la longueur. La dimension fractale permettra de quantifier, de mesurer les formes, les géométries, mettant en valeur le caractère universel de ces formes.

La théorie trouva ensuite de nombreuses applications (et en trouvera probablement encore) en géologie, en biologie, en physique, mais aussi en design, photographie et cinématographie.

## B. Un objet fractal, qu'est-ce que c'est?

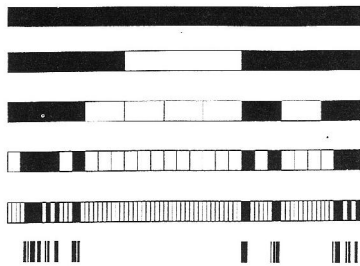
### 1. Introduction.

Nous sommes tous habitués aux objets de la géométrie euclidienne: aux droites, aux rectangles, aux cubes...Ils nous permettent de décrire simplement ce que l'on trouve dans la nature. Ainsi, les troncs d'arbres sont approximativement des cylindres et les oranges des sphères. Mais, face à des objets plus complexes tels que les nuages, les côtes rocheuses, les feuilles, les reliefs, un flocon de neige, un chou-fleur, la géométrie euclidienne est inadéquate, on fait donc appel à la géométrie fractale.

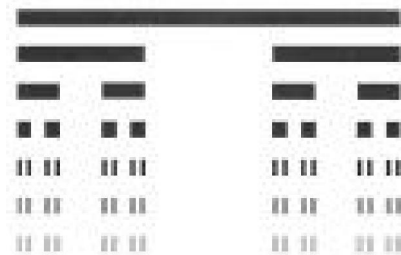
La géométrie fractale est donc un langage utile pour décrire les formes complexes, et permet la description de processus non linéaires. Dans un processus linéaire, on peut déduire un chiffre de ceux qui le précèdent. Lorsque ce n'est pas possible, on fait appel à la notion de hasard. Par exemple, la trajectoire d'un dé relève du hasard. En fait, elle résulte de causes imperceptibles amplifiées par le lancement du dé. Le résultat est un processus chaotique.

La complexité des formes des objets naturels résulte généralement de processus simples, souvent récursifs. Ainsi c'est grâce à l'informatique que l'étude des fractales s'est développée.

*Exemples : L'ensemble de Cantor aléatoire*



*L'ensemble de Cantor régulier*



A chaque étape, on enlève 1/3 de la bande noire au hasard. La figure obtenue au bout de la 6<sup>ème</sup> étape est un ensemble invariant d'échelle, déterministe (cas où l'on enlève toujours le tiers du milieu) ou non ( si l'on enlève, comme ici le tiers au hasard). Très vite au cours des itérations les segments deviennent de plus en plus fins, aboutissant à la "Poussière de Cantor".

### 2. Les objets fractals

#### a) Notion de dimension fractale et d'invariance d'échelle

Dans la géométrie classique, une ligne est un objet à une dimension, une surface un objet à deux dimensions, un volume un objet à trois dimensions. Nous sommes donc habitués à des objets dont la dimension (D) est un nombre entier 1, 2 ou 3. Mais il n'est pas précisé quelle serait la dimension d'une série de points sur une ligne, une courbe irrégulière et plane, une surface pleine de convolutions. Dans ce but le terme de dimension fractale a été introduit par B. Mandelbrot en 1970. La dimension fractale est donc un nombre qui mesure le degré d'irrégularité ou de fragmentation d'un objet ou qui mesure la rugosité d'une surface. La dimension fractale est une fraction ou un nombre irrationnel ( $\pi$ , 1.23, etc.) ou un entier (Peano). Une analogie permet de mieux comprendre ce concept : la composition d'une famille moyenne au Canada est de 2.2 enfants, quelle est la signification du 0.2 enfant ?

Cette notion de dimension fractale s'applique aux objets invariants d'échelle : on y trouve des parties qui sont semblables à l'objet lui-même à une dilatation (agrandissement) près. Quand on change l'échelle d'observation d'un objet invariant d'échelle, on conserve les formes.

## b) L'auto-similarité : exacte ou statistique

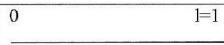
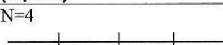
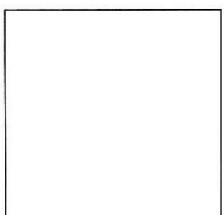
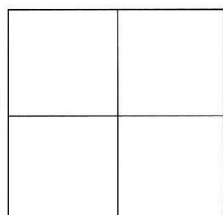
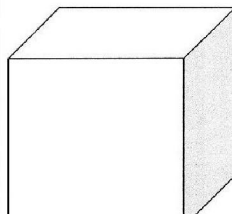
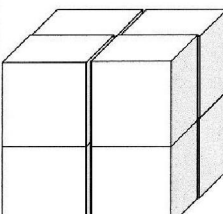
Contrairement à une figure géométrique euclidienne, une fractale n'a pas d'échelle ou de grandeur caractéristique. Chaque portion d'une fractale reproduit la forme générale, quelque soit le grossissement : c'est la propriété d'auto-similarité.

L'auto-similarité peut être exacte : dans ce cas, en changeant d'échelle, on a un objet agrandi identique à l'original. La courbe de Von Koch est un exemple de fractale auto-similaire. Mais pour beaucoup d'objets naturels, l'auto-similarité n'est pas exacte : l'objet agrandi ressemble à son image initiale mais ce n'est pas exactement le même. C'est le cas, par exemple, d'une côte rocheuse ou d'un profil topographique. Dans ces cas l'auto-similarité est statistique.

Un objet fractal est donc un objet dont la géométrie peut être décrite par une dimension non entière, qui n'a pas d'échelle est qui est auto-similaire.

### 3. Calcul de la dimension fractale

Pour comprendre ce calcul nous allons étudier le cas d'une auto-similarité exacte :

Élément de géométrie euclidienne		Nombre de copies égales (N parts)	Relation générale $1 = N \cdot L^D$
1 D	$l=1$ 	N=4 	Ligne = $4(1/4)$ $\infty = 2(1/2)$
2D	S=1 	N=4 	Surface = $4(1/2)^2$
3D	V=1 	N=8 	Volume = $8(1/2)^3$

En divisant un objet en N copies égales à lui-même, nous avons la relation générale suivante:

$$1 = N \cdot L^D \quad \text{où } L \text{ est la longueur d'une division et } D \text{ la dimension.}$$

Cette relation peut aussi s'écrire:

$$\log 1 = \log(N \cdot L^D) \Leftrightarrow 0 = \log N + D \cdot \log L \Leftrightarrow \log N = -D \cdot \log L$$

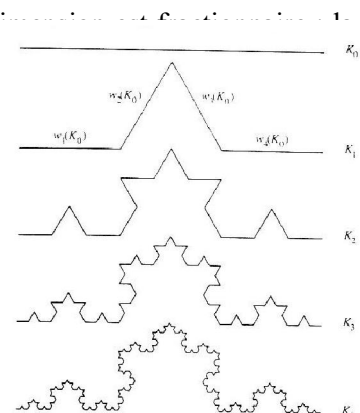
Soit:  $D = (\log N) / (\log 1/L)$

#### Exemple de la courbe de Von Koch :

C'est l'exemple le plus classique et le plus historique. On l'obtient en remplaçant le tiers central d'un segment par un triangle équilatéral sans base, puis en répétant cette opération pour chacun des segments.

En répétant cette opération, on obtient une courbe fractale dont la courbe de Von Koch. Cette courbe peut être divisée en  $N = 4$  sous-courbes par une dilatation d'échelle de facteur 3 près.

L=1



4 segments  
de longueur 1/3



$$D = (\text{Log } N) / (\text{Log } 1/L)$$

$$D = \text{Log } 4 / \text{Log } 3$$

$$D = 1.26$$

Remarque : si on remplace le point de départ de la courbe de Von Koch par un triangle équilatéral, et qu'on ajoute à tous ses côtés des protubérances triangulaires, de façon répétée jusqu'à l'infini, on obtient le célèbre flocon de neige de Von Koch (cf annexe 1 flocon).

Ainsi la théorie fractale est une généralisation de la notion de dimension de la géométrie euclidienne.

Les dimensions sont entières dans la géométrie euclidienne, tandis qu'elles seront irrationnelles pour les objets fractals.

Donc en géométrie fractale, la dimension d'une série de points sur une ligne sera comprise entre 0 et 1, celle d'une courbe irrégulière et plane sera comprise entre 1 et 2, et celle d'une surface pleine de convolutions sera comprise entre 2 et 3.

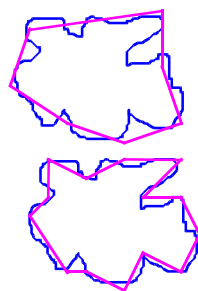
Ainsi, une courbe de Peano, baptisée « courbe de remplissage du plan », n'est rien d'autre qu'une droite qui se plie et qui se déforme. Or, comme nous le savons, une droite n'a qu'une seule dimension, les mathématiciens considéraient comme évident qu'une courbe, quelle qu'en soit la complexité, devait être unidimensionnelle. Cependant Peano avait tracé une courbe qui se tordait de manière tellement complexe qu'elle remplissait la totalité du plan, pour cette raison, on peut calculer que la dimension fractale d'une courbe de Peano peut être 2 !

#### 4. Les méthodes de l'analyse fractale

##### a) **La méthode périmétrique ou méthode de Richardson, 1961** ( cf annexe 2 méthode périmétrique)

Cette méthode consiste à calculer la dimension fractale d'un objet ( les côtes et les frontières de pays plus particulièrement), en déterminant son périmètre. Pour cela on reporte autant de fois que possible, différentes longueurs ( ici  $\lambda_1, \lambda_2$ , avec  $\lambda_1 > \lambda_2$  ) sur son contour. Une petite longueur reportée permet d'inclure dans notre périmètre plus de détails de la forme de l'objet. Autrement dit, nous allons effectuer une série de mesures avec différentes longueurs, qui vont décroître petit à petit, de manière à avoir des résultats de plus en plus précis ( les résultats seront reportés dans un graphique Log/Log ).

Nous obtenons les relations suivantes :



$\lambda_1$  ———

$$\text{Périmètre } P_1 = N_1 \cdot \lambda_1$$

$\lambda_2$  ———

$$\text{Périmètre } P_2 = N_2 \cdot \lambda_2$$

On a donc :  $N = P/\lambda$

Si le périmètre est relié à l'échelle par une loi de puissance :  $N = \lambda^{-D}$

On a alors :  $P/\lambda = \lambda^{-D}$  et,  $P = \lambda^{1-D}$

On peut aussi l'écrire :  $\text{Log } P = (1-D) \text{Log } \lambda$

Par conséquent :  $1-D = \text{Log } P / \text{Log } \lambda$

La dimension fractale est déduite de la pente de la droite dans le graphique Log/Log.

### b) La méthode du "comptage de boîtes" ou Box-counting method

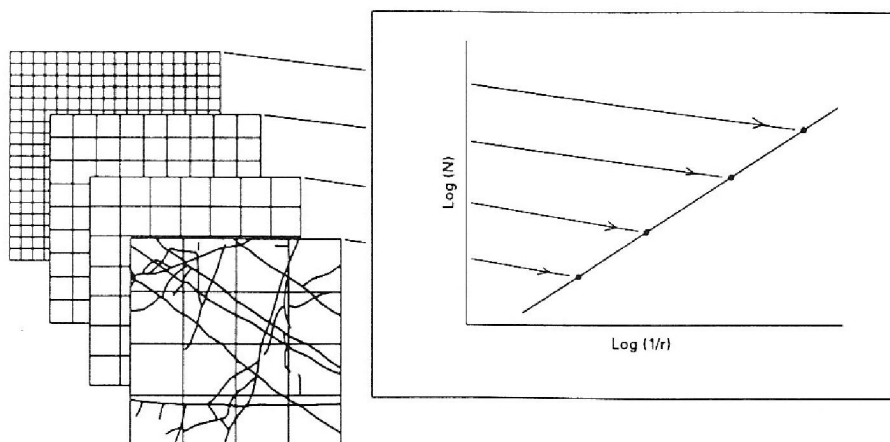
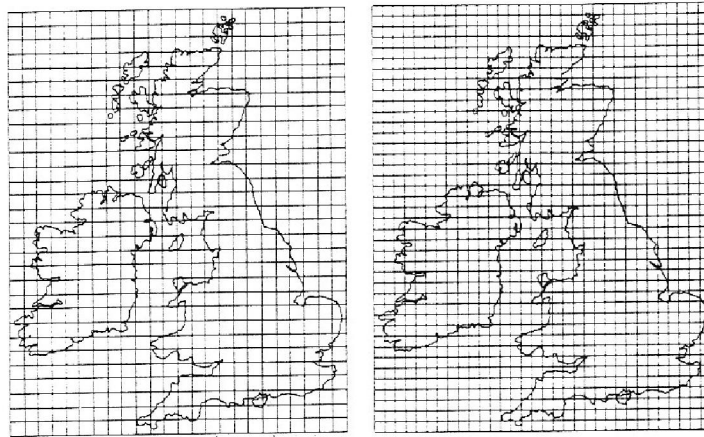
Cette méthode consiste à déterminer la dimension fractale par superposition de grilles de tailles différentes sur un ensemble fractal. Sur la figure nous pouvons voir la carte de la Grande Bretagne. On superpose une première grille sur la carte et on compte le nombre de cellules qui contiennent une partie de la Grande Bretagne. Ensuite on recommence avec d'autres grilles en obtenant des valeurs de  $N$  ( nombres de cellules occupées ) plus grandes si  $r$  ( la taille des cellules) décroît. On reporte ensuite nos valeurs sur un diagramme  $\text{Log } N / \text{Log } 1/r$ .

La pente de la droite obtenue, comme dans la méthode précédente, correspond à la dimension fractale  $D$ .

On l'utilise pour déterminer la dimension fractale des cristaux, des réseaux de fracture.

#### *Méthode du comptage de boîte ou méthode des mailles :*

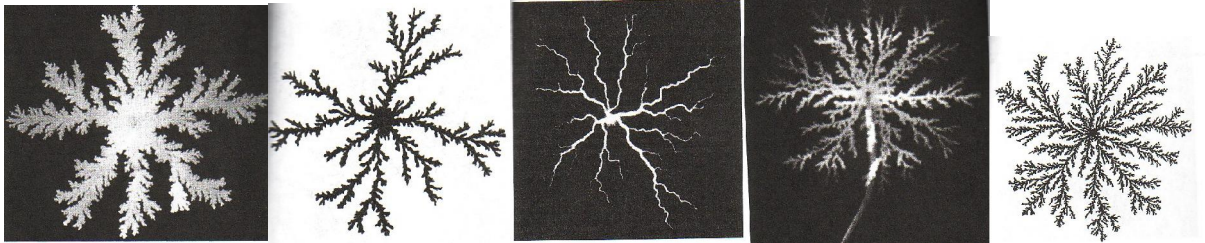
Mesure de la dimension fractale par superposition de grilles de tailles différentes. Si l'ensemble est fractal, les données reportées sur le diagramme  $\text{log } N / \text{log } (1/r)$  (avec  $N$  le nombre de cellules occupées et  $r$  la taille de la cellule) s'alignent selon une droite dont la pente correspond à la dimension fractale  $D$ .



## C. Et dans la réalité ?

### 1. Universalité

Dans « Universalités et fractales » (1997), Sapoval découvre l'universalité des fractales en comparant des structures géométriques, qui sont en fait des objets fractals, obtenus dans des conditions naturelles complètement différentes telles qu'un dépôt électrolytique sous champ fort, une injection à grande vitesse d'un fluide peu visqueux dans un fluide très visqueux, une injection d'eau dans du plâtre, une croissance de colonie bactérienne, une photographie d'une décharge électrique à la surface d'une plaque de verre, un angiogramme de la rétine humaine, un dépôt spontané d'argent à partir d'une solution de nitrate d'argent sur un disque de cuivre placé au centre, une arborescence de cuivre, etc... (cf photos annexes)



*Dans l'ordre : Croissance d'une colonie bactérienne sur une plaque d'agar ; dépôt électrolytique sous champ fort ; décharge électrique à la surface d'une plaque de verre ; injection à grande vitesse d'un fluide peu visqueux dans un fluide très visqueux ; dépôt spontané d'argent sur un disque de cuivre placé au centre.*

L'universalité c'est précisément ce en quoi ces figures se ressemblent, alors que les différences entre ces images c'est justement ce qui dans chaque cas n'est pas universel.

Le lien entre fractale mathématique ou déterministe et objet fractal de la nature réside dans cette universalité, à certaines différences près.

Nous avons vu précédemment que les fractales sont caractérisées par une propriété de similitude interne (ou auto-similarité). Cette similitude interne sera exacte pour les objets mathématiques purs, tels que la courbe classique de Von Koch, par contre dans la nature cette similitude interne est assez approximative. En effet, si l'on prend l'exemple d'un chou-fleur, et que l'on observe une branche de celui-ci, cette branche va ressembler à un chou-fleur entier, mais elle ne sera pas sa réplique exacte.

Comme nous l'avons vu, les fractales mathématiques pures, à similitude interne exacte, sont dites déterministes, les autres sont dites aléatoires ou statistiques.

### 2. Le rôle du hasard

C'est en effet le phénomène de hasard qui va régir la formation des fractales dans la nature : les arbres ont tous des caractéristiques communes, leur forme géométrique se ressemblent, et pourtant, même au sein d'une même espèce, chaque arbre est unique. Cette différence est attribuable au hasard, c'est à dire les processus non contrôlés de leur développement (ou tout au moins, tellement complexes que nous n'y avons pas accès).

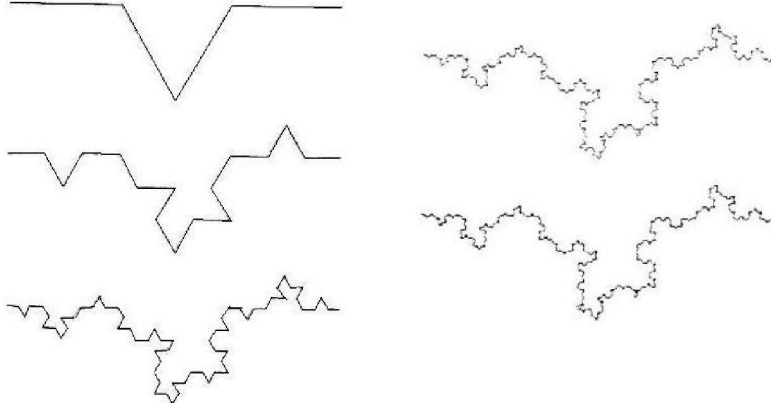
Le rôle du hasard dans la formation des objets de la nature joue un rôle capital, c'est lui qui différencie les fractales aléatoires de la nature et l'objet mathématique pur.

On entend par hasard, l'ensemble des processus qu'on ne peut pas contrôler et qui interviennent dans la formation de l'objet fractal : l'érosion, la tectonique des plaques, les contraintes naturelles...

Pour mieux comprendre le rôle du hasard, revenons à notre flocon de Von Koch et introduisons le hasard dans sa construction.



*Courbe de Von Koch générée avec hasard*



Sa forme est modifiée, on obtient une figure qui ressemble à une côte rocheuse, sa similitude interne devient aléatoire tout en gardant les mêmes propriétés que les fractales mathématiques pures.

### **3. La limite de l'invariance d'échelle**

De la notion de similitude interne découle celle de l'échelle. En effet si on regarde un même objet à des échelles différentes on va voir une invariance de forme.

L'échelle des objets fractals va être liée au nombre d'itérations qu'aura subi la forme initiale. Dans la nature le nombre d'itérations va être limité, d'où un intervalle d'échelle limité. La limite inférieure est déterminée, au pire, par l'échelle de l'atome dont la structure est régulière, et la limite supérieure est définie par la taille de l'objet lui-même.

Sur ce point, les objets naturels diffèrent des objets mathématiques par le fait que ces derniers possèdent un nombre d'échelles infini.

## II. Les formes fractales en géologie

### A. Les côtes rocheuses

Nous avons vu que l'on pouvait caractériser une côte rocheuse par sa dimension fractale  $D$ , exposant compris entre 1 et 2, qui définissait la complexité d'une côte, par opposition à la distance qui n'avait pas de sens réel pour mesurer une côte rocheuse à la géométrie complexe.

Nous allons essayer de comprendre ce que signifie ce nombre réel  $D$  pour une côte, comment peut-on le calculer, l'estimer et quelles en sont ses applications, et nous décrivons le processus de fractalisation d'une côte rocheuse.

#### 1. Le caractère fractal des côtes

L'exemple de la courbe de Von Koch - et d'autant plus celui généré avec hasard - donne une bonne idée du caractère fractal d'une côte et de sa dimension. En effet on imagine facilement la ressemblance entre un ensemble de baies et de caps représentés dans le flocon, et la forme de la côte de Bretagne avec ses baies et ses caps réels.

Lorsqu'on prend les cartes côtières de la Bretagne, quelle que soit l'échelle, elles représentent toutes une distribution semblable de baies et de caps, ceux-ci ayant eux-même des baies et des caps plus petits et ainsi de suite. Ainsi, si l'on agrandit une côte, de nouvelles baies et de nouveaux caps apparaissent, et l'ensemble continue de ressembler à une côte réelle. Un minuscule morceau de côte agrandi 10 fois ressemble toujours à une côte, exactement comme pour un segment de la courbe de Von Koch.

*Vue aérienne d'un paysage invariant d'échelle*



C'est le principe d'auto-similarité (invariance d'échelle c'est à dire qu'une image ou une partie zoomée de celle-ci sont similaires, elles se ressemblent) qui s'applique sans limite pour un objet mathématique comme le flocon de Von Koch mais qui ne s'étend pas vers l'infiniment grand pour une côte (si l'on s'éloigne, on ne distinguera plus la côte, mais le globe terrestre, etc.) ni vers l'infiniment petit, la limite étant de l'ordre de la molécule (on considère que la structure moléculaire redevient régulière).

#### 2. La dimension $D$

Ces considérations faites, on peut alors s'intéresser à la dimension fractale  $D$  qui caractérise parfaitement une côte. Nous avons vu que l'on pouvait associer  $D$  à l'idée de complexité. En fait, une côte est modélisable par une courbe de longueur infinie mais constituant une surface d'aire finie (le continent). En géométrie euclidienne une courbe est de dimension 1, alors qu'un plan est de dimension 2. Si une côte a une géométrie linéaire s'approchant d'une courbe continue dérivable en tout point, sa dimension fractale tendra vers 1. Au contraire, si une côte a une géométrie très complexe, la courbe qui la modélise aura tendance à remplir le plan, celle-ci présentera de nombreux points non dérivables, et sa dimension fractale tendra vers 2 (c'est le cas d'une figure fractale de Peano qui remplit complètement tout ou partie du plan).

En fait, la dimension fractale des côtes est comprise entre 1 et 1,5. Plusieurs méthodes sont possibles pour évaluer cette dimension, toutes consistent à déterminer la valeur de l'homothétie entre deux images similaires pour pouvoir écrire la loi :  $D = \text{Log } N / \text{Log } (1/L)$  où  $N$  est par exemple le nombre de baies contenues dans une grande baie à une dilatation (agrandissement) près et  $1/L$  représente le rapport de dilatation nécessaire pour obtenir une image similaire à l'image zoomée.

### **3. Applications**

Par la méthode des mailles (I B 4 b), on peut donc comparer la complexité de différentes côtes en comparant leur dimension fractale. Plusieurs applications directes en découlent. On pourra par exemple calculer le nombre de tours génoises qu'il faudrait implanter le long des côtes de Corse pour surveiller le littoral, étant donné que chaque tour doit pouvoir communiquer par des signaux lumineux ayant une portée de 5 km. On pourrait montrer que ce nombre est égal à  $(L/5)^D$ .

Les autres applications découlent de la modélisation qu'apporte la théorie fractale, on pourra facilement reproduire artificiellement le dessin d'une côte numériquement en fonction de la dimension D désirée. Il est important de voir que la dimension D souligne le caractère universel de tous les objets ayant la même dimension D, tous ont une similitude étonnante (montré par Sapoal dans « Universalité et fractales » (1997)).

### **4. Comment une côte rocheuse acquiert-elle un caractère fractal ?**

Contrairement à la courbe de Von Koch classique, le processus géologique qui aboutit à la morphologie de la Bretagne par exemple, comprend lui, des aspects aléatoires, c'est à dire non contrôlés, en cela, la côte de Bretagne est un exemple de fractale aléatoire.

Le nombre très grand de processus qui déterminent la morphologie d'une côte empêche une explication exhaustive, mais on peut attribuer l'ensemble de ces processus au phénomène de l'érosion. L'érosion est la dislocation, le déplacement et le transport de matériaux, sous forme de solution ou de particules. L'énergie nécessaire peut être produite par les gouttes de pluie, le ruissellement de l'eau, le vent, les vagues, ou simplement la gravité (comme dans les glissements de terrain).

La géomorphologie montre que parmi les différents processus agissant à la surface de la Terre, la pluie et les rivières sont les agents érosifs les plus violents. Par contraste, bien que l'action des vagues sur une côte rocheuse puisse être souvent impressionnante, l'érosion des côtes est généralement très lente. C'est cette lenteur qui peut expliquer l'importance du détail présent dans la morphologie des côtes. Chaque baie, chaque cap est le résultat de millions d'années d'érosion, qui intègre finalement chaque baie à une nouvelle baie, qui sera elle-même intégrée à un nouveau détail du relief de la côte.

C'est ce processus lent d'érosion qui donne le caractère fractal aléatoire aux côtes rocheuses.

## **B. Montagnes**

B. Mandelbrot dans « Les Objets Fractals » de 1975, présente plusieurs figures de relief montagneux produits à partir de fractales. La ressemblance avec les montagnes réelles est étonnante, et c'est encore le caractère universel de la dimension fractale qui va permettre de modéliser d'une façon nouvelle le relief montagneux.

En fait, la modélisation fractale d'un relief montagneux va reprendre les mêmes explications développées pour la modélisation d'une côte rocheuse, à la différence que la dimension fractale sera située entre 2 et 3. En effet, un relief montagneux est représenté par un polygone ( dimension 2) très compliqué qui peut tendre à remplir complètement l'espace (dimension 3). La notion de complexité donnée par le nombre D reste la même que pour les côtes rocheuses. Mandelbrot montre que la valeur de D est en fait comprise entre 2,1 et 2,5 pour modéliser l'ensemble des montagnes que l'on peut trouver sur terre, selon leur complexité et leur relief. La modélisation du relief montagneux est à associer au mouvement brownien fractionnaire qui correspond au trajet aléatoire d'un objet en fonction du temps. Un relief montagneux correspond donc à un objet fractal aléatoire déterminé par les mêmes paramètres de l'érosion décrits auparavant, où la tectonique des plaques joue un rôle important. C'est l'ensemble des processus aléatoires de l'érosion qui donne le caractère fractal, c'est à dire sa complexité dans le détail, à un relief montagneux.



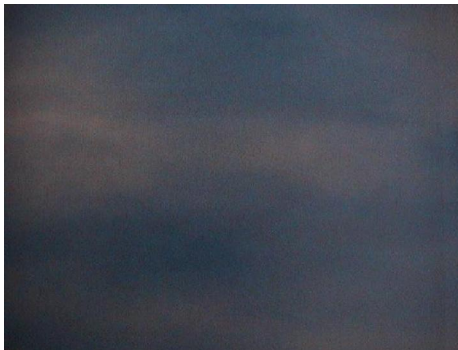
La modélisation fractale du relief montagneux a trouvé une application très efficace dans le modélisme artistique et cinématographique d'un paysage montagneux, cette technique est très utilisée pour la conception de paysages artificiels dans les films, dessins animés et jeux vidéos.

*Paysage fractal de montagne numérique*

### **C. Nuages**

Il existe un rapport très serré entre paysage montagneux et géométrie des nuages dans le ciel. Les nuages suivent aussi une construction fortement liée au hasard étant donné le très grand nombre de paramètres incontrôlables qui entrent en jeu dans leur formation.

Ainsi, en utilisant le même codage numérique ayant permis le dessin de la montagne ci-dessus mais en changeant la palette de couleurs, on obtient le dessin très réaliste (et beaucoup utilisé dans la reconstitution de paysages) suivant :



### **D. Oxyde de manganèse**



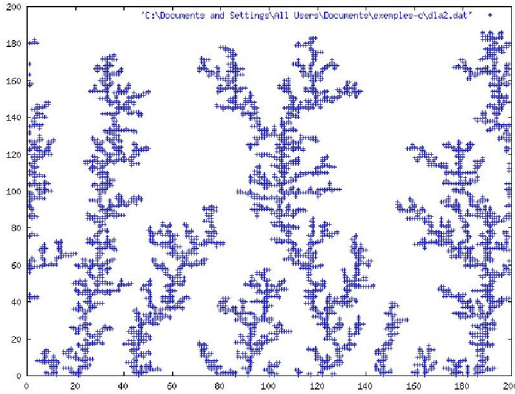
B. Mandelbrot a beaucoup étudié le rapport entre marche aléatoire, mouvement brownien et fractale. En fait c'est un moyen nouveau de décrire la formation de géométries naturelles comme celle de la photo : une simple pierre exposée à l'oxyde de manganèse dans la nature.

On retrouve la même sorte de géométrie que pour la série de photos exposée en annexe et qui a servi de base à Sapoval pour démontrer le caractère universel des fractales.

Imaginons une molécule d'oxyde de manganèse se « promenant » au hasard sur une surface plane et fluide qu'est la surface de la pierre. Quelques molécules sont fixées dès le départ, de façon aléatoire aux bords de la pierre. Dès qu'une autre molécule en rencontre une déjà fixée, elle se fixe à son tour à celle-ci et ainsi de suite.

On pourrait modéliser ce processus par des « pièges » qui « attrapent » des objets se déplaçant de façon aléatoire depuis une origine, et qui deviennent pièges à leur tour une fois attrapés.

Ce processus a été programmé informatiquement et donne le résultat suivant :



On retrouve bien le résultat escompté : la ressemblance avec l'oxyde de manganèse est très forte.

On peut remarquer que ce processus tendra à ne développer que les plus grosses ramifications, l'accès aux pièges les plus près du bord étant gêné par les plus grandes ramifications qui captent les molécules avant qu'elles n'atteignent le bord (phénomène d'ombre).

## E. Réseaux fluviaux

La figure 1 ci-dessous illustre une courbe approchée de Peano qui a pour propriété de ne jamais se recouper, avec une dimension qui tend vers 2 (la courbe remplit le plan). La figure 2 représente la même construction dans laquelle on a mis en valeur les réseaux (courbe continue sans points doubles partant d'une extrémité) inhérents à une approche de Peano.

La règle de construction est celle-ci : chaque extrémité est notée « 1 » et un numéro  $n$  est suivi du numéro  $n+1$  s'il n'existe pas de réseau plus long passant par la même case. De cette façon, un réseau est décrit par une suite  $U_{n+1}=U_n+1$  avec  $U_1=1$ , sa longueur est le dernier chiffre de la suite. Ici, le réseau le plus long est celui commençant tout à fait en haut à droite de la figure et se terminant en bas au numéro 22.

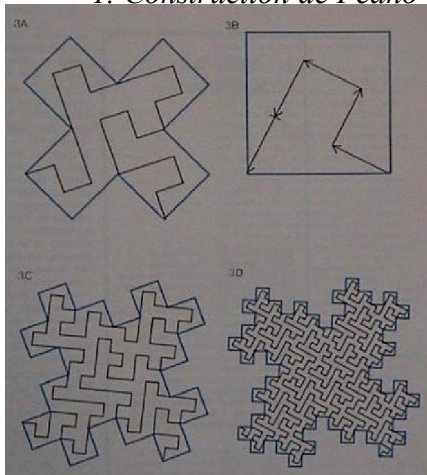
Imaginons maintenant que la partie inférieure à la limite AB soit la mer, que les numéros 1 soient des sources d'eau en altitude, que le réseau de longueur 22 soit un fleuve, et que les autres réseaux de longueurs inférieures en soient les affluents (sauf pour les deux petits réseaux indépendants), on alors un modèle fractal très intéressant de la structure des réseaux fluviaux sur un continent.

On comprend le rapport entre approche de Peano et réseau fluvial par le fait que l'eau partant de sa source voit son chemin déterminé par le relief qui impose une distance minimale entre les différents affluents (comme dans l'algorithme de construction d'une approche de Peano), et qui interdit tout point double : deux affluents qui se croisent ne peuvent plus se séparer.

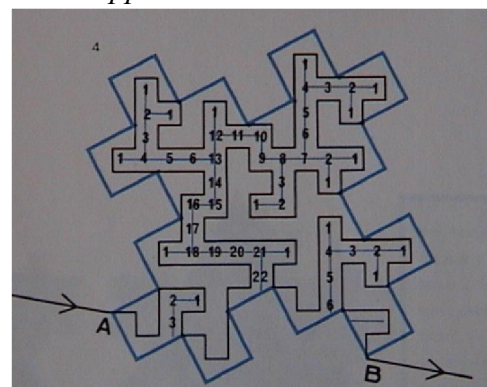
Nous l'avons vu, une telle courbe (le chemin de l'eau) a la propriété de pouvoir remplir le plan ( $D$  tend vers 2), c'est la manière sélectionnée par la nature pour répartir au maximum l'eau sur le terrain, ce qui a permis une occupation maximum des sols par la végétation, et donc les conditions optimums de développement de la vie... Seule la géométrie fractale « permettait » cette répartition optimale.

La construction n'est pas parfaite et ne reflète pas toujours la réalité, par exemple, les rivières sont en réalité de largeur non nulle et l'inclusion des ruisselets ne se poursuit pas indéfiniment. Cependant, cette universalité des fractales que l'on retrouve en hydrologie ouvre de nouvelles perspectives comme l'étude numérique des rivières.

### 1. Construction de Peano



### 2. Réseaux dans une approche de Peano



### III. Les formes fractales dans le monde vivant

#### A. Chez les végétaux

Nous avons déjà vu dans les chapitres précédents, un certain nombre de formes fractales provenant du règne végétal. C'est le cas du chou-fleur, et des arbres. Mais il faut savoir qu'il existe un très grand nombre de formes fractales dans ce règne, comme par exemple les fougères, les formes des feuilles et leurs nervures, les développements racinaires, l'écorce des arbres, le chou romanesco...

##### 1. Le chou romanesco et le chou-fleur



Le chou romanesco et le chou-fleur figurent parmi les plus belles formes de cette catégorie. A l'œil nu, ils ont la forme d'une section de sphère entourée de feuilles. Cependant si l'on regarde de plus près leurs surfaces, on peut noter que celles-ci sont constituées de cônes qui se juxtaposent de manière enroulée en spirales, formant ainsi des volutes qui constituent elles-même des cônes similaires aux premiers, mais d'échelle plus grande.

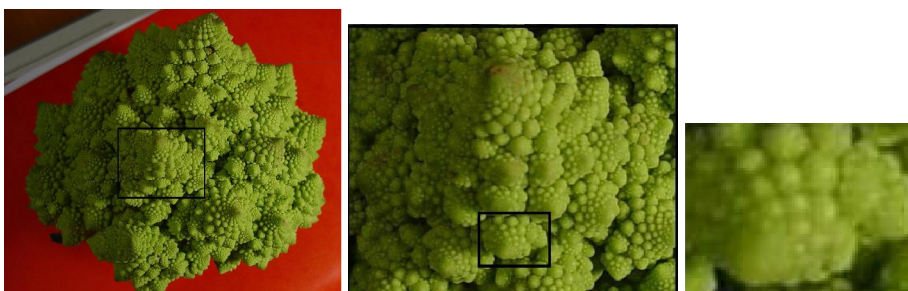
Si on coupe le chou-fleur de haut en bas, on note une organisation en branches principales qui se séparent en branches plus petites. La première division se produit sur la branche principale d'origine, et peut donner 3 à 8 branches secondaires. De même si on coupe le chou romanesco, on note une structure identique. La première division se produit sur la branche principale d'origine et peut donner de 10 à 15 branches secondaires. Cette division se renouvelle de la même manière à chaque étage avec une régularité impressionnante pour les deux. A vue d'œil on peut remarquer entre 5 et 8 étages de divisions entre la branche d'origine et la surface du chou-fleur et on peut remarquer entre 10 et 15 étages de divisions entre la branche d'origine et la surface du chou romanesco. Les dimensions des surfaces de ces deux choux sont comprises entre 2 et 3.



Donc pour les deux, chacune des branches (ou sous branches agrandies plusieurs fois) peut être confondue avec le chou lui-même ou avec la branche principale d'origine.

Le chou-fleur et le chou romanesco présentent donc une auto-similarité et peuvent être considérés comme fractals.

*Chou romanesco zoomé successivement :*

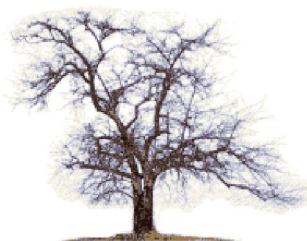


## 2. Les fougères



La fougère est un autre exemple de forme fractale. Ce sont en particulier les feuilles ou frondes de la plante qui présentent cette particularité d'auto similarité. La dimension fractale des fougères est d'environ 1,7.

## 3. L'origine des formes fractales végétales



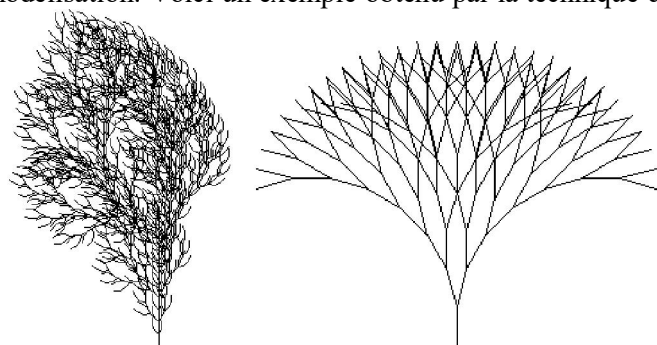
Une forme fractale peut être définie par une forme contenue dans un volume fini, mais possédant une surface qui tend vers l'infini, et cela sans se rencontrer. Même si l'étude des formes fractales est assez récente, il ressort que les espèces végétales développent ces formes pour pouvoir augmenter leur surface externe, c'est-à-dire, leur surface d'échange avec le milieu extérieur, et cela pour pratiquer par exemple la photosynthèse, l'absorption racinaire...

La croissance d'une plante s'accompagne nécessairement d'un changement de forme. En effet, les plantes essaient d'adopter une forme qui s'éloigne le plus possible d'une sphère (car si elles étaient trop volumineuses, c'est à dire massives, elles seraient trop lourdes et perdraient beaucoup trop d'énergie pour pouvoir survivre). Selon F. Hallé, elles vont arriver à ce résultat grâce au fractionnement de la croissance le long d'un certain nombre d'axes, (tronc et branches au-dessus du sol, pivot et racines latérales au-dessous). A mesure que la plante poursuit sa croissance, apparaît la nécessité d'une ramification aérienne et souterraine, qui donne accès à l'espace tridimensionnel sans les inconvénients liés au volume ; la plante s'approprie l'espace en le remplissant d'une surface complexe finement repliée sur elle-même, de sorte que le volume laisse la place aux dimensions linéaires (racines, tiges) et aux surfaces (feuilles et brachyrhizes : homologues souterraines des feuilles). La croissance de la plante va aussi être régie par les contraintes du milieu extérieur qui sont souvent les mêmes à différentes échelles.

## 4. Les L-systèmes

On a donc vu que les objets évoqués ci-dessus sont en réalité constitués des mêmes formes à plus ou moins grande échelle. La modélisation de ces objets va donc se faire avec un programme qui répète le même motif un grand nombre de fois et à des tailles différentes. Cette technique a été inventée par Aristid Lindenmayer, qui fut l'un des premiers à s'apercevoir que la nature comportait des formes répétitives à différentes échelles. On la nomme technique des L-Systèmes.

Un L-Système est un groupe de règles et de symboles qui modélise un processus de croissance. Ces règles permettent de construire une chaîne de symboles qui sera modifiée à chacune des étapes de la modélisation. Voici un exemple obtenu par la technique des L-systèmes :

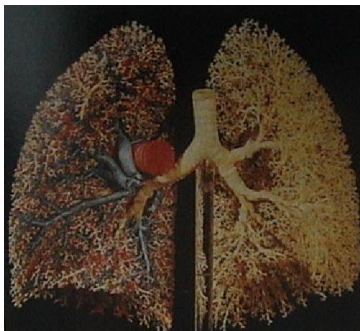


## **B. Les fractales dans les poumons**

### **1. Introduction**

Le nombre de possibilités d'applications de la géométrie fractale en biologie est immense. Cependant on ne peut pas parler de fractales parfaites car le phénomène d'auto-similarité, n'est pas infini comme dans les modèles théoriques mathématiques. Malgré tout à l'intérieur de notre corps on trouve de multiples structures considérées comme fractales : les voies respiratoires, l'intestin grêle, le réseau sanguin, le réseau des neurones dans le cerveau... nous nous limiterons à l'étude du poumon et de sa formation.

### **2. Quelques généralités**



Les bronches et les bronchioles des poumons présentent une structure arborescente. Les ramifications de cet "arbre" sont régies par un désordre orchestré par certaines lois : les arborescences de petites tailles sont semblables à celles de tailles supérieures, on a donc un phénomène d'auto-similarité. Le poumon a donc une architecture fractale. Toutefois on peut se demander pourquoi les poumons sont fractals. L'examen de la ramification des bronches dans les poumons peut nous apporter une réponse concrète. En effet, ce sont les poumons qui assurent les échanges gazeux par l'intermédiaire d'une surface dont l'aire doit être la plus grande possible pour un encombrement minimum et donc un volume limité. Ainsi, si l'on utilisait, par exemple, la géométrie d'une sphère pour augmenter l'aire, on augmenterait son rayon et son volume et on ne respecterait plus la contrainte d'une surface d'échanges importante pour un volume limité ( et assez petit ) car chez l'homme adulte la surface d'échanges est d'environ 100m<sup>2</sup> ce qui correspondrait à une sphère peu viable de 2.8 m de rayon ! La surface occupée par nos poumons est infime par rapport à la surface d'échanges gazeux qu'ils permettent. Ainsi la structure arborescente des bronches et donc la structure fractale de celle-ci permettent d'accroître cette surface d'échanges. Les bronches ont donc une surface énorme à l'intérieur du volume restreint de la cage thoracique.

Les fractales interviennent dans la structure des poumons mais aussi dans leur fonctionnement. En effet la formation aléatoire de jonctions entre les cellules des capillaires pulmonaires crée un ensemble de passages de tailles hétérogènes, comparable à un objet fractal. Ce modèle de géométrie non euclidienne donc "désordonnée", permet une description précise du contrôle des échanges de macromolécules entre le sang et les tissus.

### **3. La configuration des poumons**

Le modèle de départ ( Fig A ) correspond à la perfection péanienne : c'est un arbre qui remplirait tout un rectangle, si ses branches pouvaient pousser indéfiniment. Il ne laisse donc aucune place à l'épaississement des bronches et bronchioles, que nécessite l'imperfection associée à l'épaisseur des membranes. Il nous faut donc aussitôt, pour modifier cet arbre, lui faire prendre "moins de place". Pour ce faire, commençons par remarquer que cet arbre est scalant, ( synonyme d'homothétie interne ou encore d'auto-similaire ), en ce sens que, si la "tige" initiale est de longueur 1, les deux tiges qui en sortent sont de longueur égales à  $r = 1/\sqrt{2}$ , et ainsi de suite en proportion. Ce caractère scalant n'est pas seulement commode du point de vue mathématique, mais il est fort réaliste. Nous allons donc le conserver tout en diminuant  $r$ .

Le résultat est la figure B, et l'on voit que les bouts des branches, loin de remplir le plan, forment des "amas" bien séparés les uns des autres. La valeur de  $r$  qui est soumise à la seule condition  $r \leq 1/\sqrt{2}$ ,

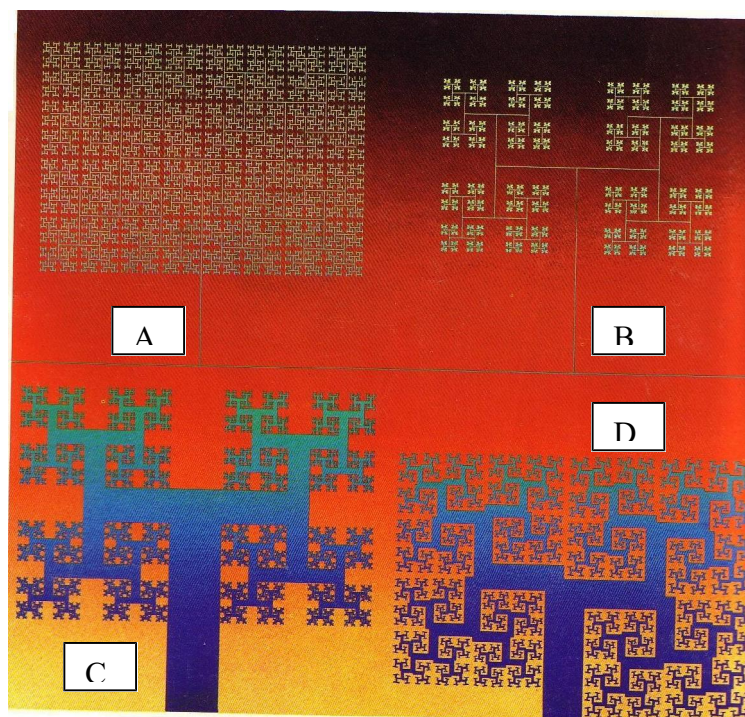


suffit à mesurer le degré d'amasement. On voit de plus que nos tiges filiformes peuvent désormais être épaissies, aussi longtemps que le rapport largeur/longueur est suffisamment petit, en deçà d'un certain maximum, fonction de  $r$ .

Le nouveau résultat relatif à des tiges aussi larges que possible correspond à la figure C. On voit aussitôt qu'il n'est lui aussi que provisoire, car les grands trous inoccupés qu'il présente sont un défaut majeur auquel nous devons très bientôt remédier. Ce modèle intermédiaire mérite qu'on s'y arrête, car il inclut déjà un trait important, d'autant plus qu'il n'est pas dû à l'astuce d'un ingénieur de l'évolution, mais simplement à la géométrie de l'espace. En effet l'aire de nos diverses branches est donnée par une série  $1 + 2r^2 + 4r^4 + \dots$ , qui converge, du fait que  $r < 1/\sqrt{2}$ , vers une somme plus petite que l'aire du rectangle qui encadre notre modèle. Toutefois, tant que  $r$  est voisin de  $1/\sqrt{2}$  (comme nous le supposons) cette série converge lentement. Donc les vingt premiers branchements ne peuvent constituer qu'une petite proportion de l'aire totale. Par contre, la longueur des parois des branches est donnée par la série  $2(1 + 2r + 4r^2 + \dots)$ , qui diverge dès que  $2r > 1$  (c'est à dire  $r > 1/2$ ) et diverge très vivement lorsque  $r$  est voisin de  $1/\sqrt{2}$ . A la limite, la contribution des vingt premiers branchements à la longueur totale est donc exactement égale à 0 %. Intuitivement, une proportion limitée de l'aire correspond à une proportion écrasante de la longueur. Etendus à l'espace, ces résultats suggèrent qu'une portion limitée du volume peut très bien contribuer à une proportion écrasante de l'aire.

Venons-en maintenant aux grands trous que nous avons laissés inoccupés. La figure D les élimine en partant d'un arbre asymétrique (une caractéristique qui est bien entendu désirable dans un modèle du poumon !). Toute cette figure a été agencée de façon qu'à la limite les branches remplissent un domaine presque rectangulaire. Mais, encore une fois, aucune limite n'est jamais atteinte en science : en particulier, il a déjà été signalé que la zone alvéolaire ne comporte qu'un nombre de branchements assez petits (deux ou trois) ; si ce n'était qu'une extrapolation des bronchioles, elle laisserait encore des interstices, comme ceux que l'on voit en rouge, orange et jaune sur la figure. Donc la petitesse du nombre de branchements laisse aux dernières branches la place d'être plus longues et plus grosses que ne le suggérerait la simple extrapolation scalante. Il s'en suit que le rapport longueur/aire (en terme spatiaux, il s'agit de aire/volume) devient fini pour les bronchioles comme pour les alvéoles, mais reste de loin plus grand pour ces dernières.

Le fait est presque trop beau pour être vraisemblable, mais les données réelles, qui sont excellentes, paraissent suggérer que le poumon se plie bien aux divers critères qui viennent d'être décrits à une exception près : la géométrie de la trachée artère et des grandes bronches est entièrement différente.



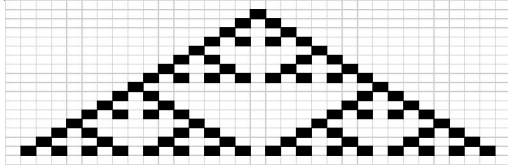
Couverture de « La Recherche » n°85, janvier 1978

## C. Coquillage et triangle de Sierpinski

La nature offre des exemples de géométrie fractale surprenants, et le coquillage du *Cymbiola innexa* REEVE en est un.

Intéressons nous d'abord au triangle de Sierpinski et à un de ses algorithmes de construction possible. Construisons un triangle de Pascal selon la formule suivante :  $a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j+1}$  où les  $a_{i,j}$  sont les nombres du triangle,  $i$  le numéro de la ligne et  $j$  le numéro de la colonne (chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus de lui) :


Masquons les chiffres pairs et colorions en noir les chiffres impairs... on obtient le triangle de Sierpinski (qui s'obtient également d'autres façons) :



Comparons maintenant le triangle de Sierpinski avec une photo du *Cymbiola innexa* REEVE ...

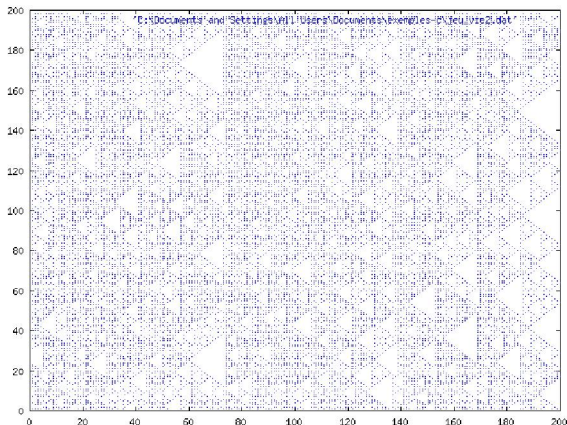


On y trouve un enchevêtrement de triangles de Sierpinski !

Le fait que cette structure puisse résulter d'une auto-organisation spatiale ressort des travaux de H. Meinhardt, qui a montré que certains types de réactions chimiques en présence de diffusion fabriquent spontanément des géométries fractales de ce type.

L'idée est que lors de la formation, plusieurs molécules sont mises en jeu, ayant entre elles des propriétés particulières.

Imaginons une molécule B et une molécule N telles que  $B + N \rightarrow N$ ,  $B + B \rightarrow B$  et  $N + N \rightarrow B$  et imaginons que ces molécules se promènent au hasard lors de la formation du coquillage, avec un sens privilégié, à chaque rencontre, on applique la règle de vie ci-dessus. L'image suivante est le résultat de ce processus programmé informatiquement :



La ressemblance avec le coquillage est frappante et on comprend mieux les processus chimiques mis en jeu lors de la formation du coquillage.

## Conclusion :

Il existe une très grande variété de formes fractales dans la nature ; dans des domaines et conditions expérimentales en apparence très différentes comme la croissance des plantes et l'organisation du poumon, on observe des phénomènes et des géométries très similaires du point de vue de leur complexité et de leur dimension fractale.

La découverte des formes fractales dans la nature constitue une forme d'universalité insoupçonnée jusqu'alors, qui permet de comparer et de modéliser des objets, de résoudre des problèmes jusqu'à présent ouverts, comme par exemple la simple caractérisation d'une côte rocheuse.

La géométrie fractale est fortement liée au hasard et aux phénomènes critiques (phénomènes de limites).

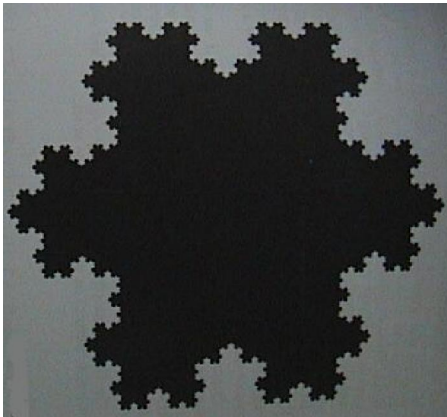
On peut donc s'attendre à trouver des formes fractales dans la nature là où l'abondance de facteurs incontrôlables rend aléatoire un processus : c'est le cas de l'érosion pour les côtes rocheuses et les montagnes, mais aussi pour le trajet emprunté par des molécules d'eau, d'oxyde de manganèse, etc. (phénomène de diffusion). C'est pourquoi la géologie rassemble de nombreux exemples de formes fractales naturelles.

On peut donc aussi s'attendre à trouver des formes fractales dans la nature là où une situation critique est nécessaire pour permettre la vie, par exemple, là où il est nécessaire d'avoir une surface maximale dans un volume minimal. C'est le cas de beaucoup de végétaux (choux, fougères, arbres,...) et de certains organes comme le poumon. On comprend alors pourquoi on retrouve ces motifs géométriques appréciés pour leur beauté à des endroits inattendus du monde vivant.

La théorie fractale a déjà trouvé de nombreuses applications en géologie, biologie, informatique... et il est fort probable qu'elle puisse aussi s'étendre à d'autres domaines encore. En particulier, tous les phénomènes chaotiques, c'est à dire sensibles aux conditions initiales, qui font appel à des structures fractales (par exemple la situation météorologique). Les perspectives qu'elle a ouvertes laissent penser que la théorie nous aidera à mieux comprendre le monde qui nous entoure.

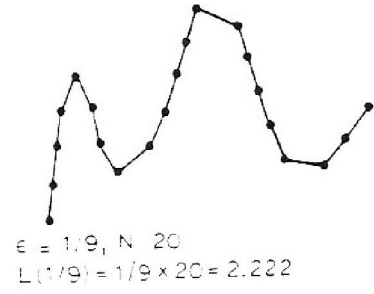
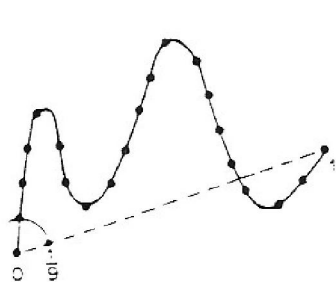
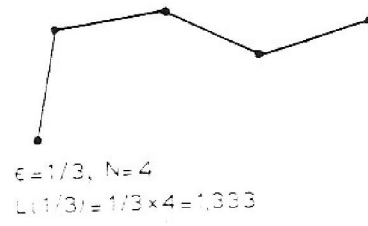
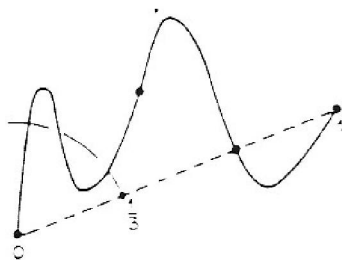
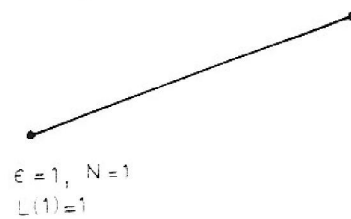
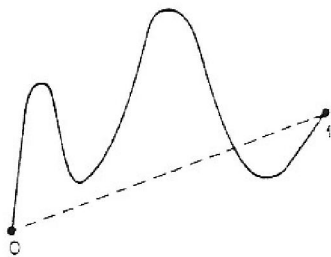
## Annexes :

### 1. Flocon de Von Koch :



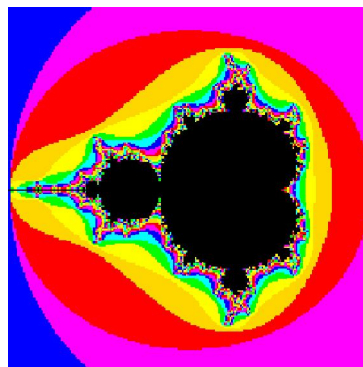
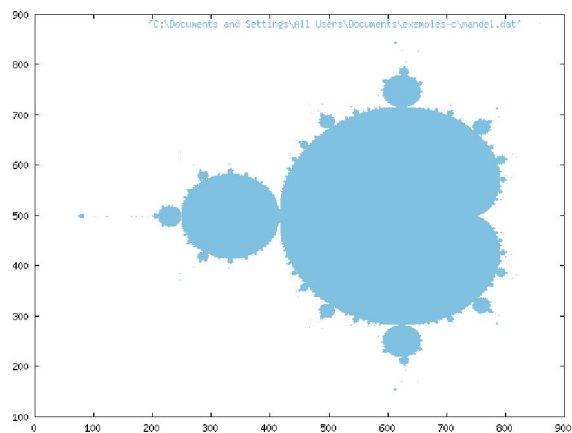
### 2. La méthode périmétrique

Mesure de la longueur d'une courbe fractale avec une précision croissante. On utilise un compas en faisant varier l'ouverture.

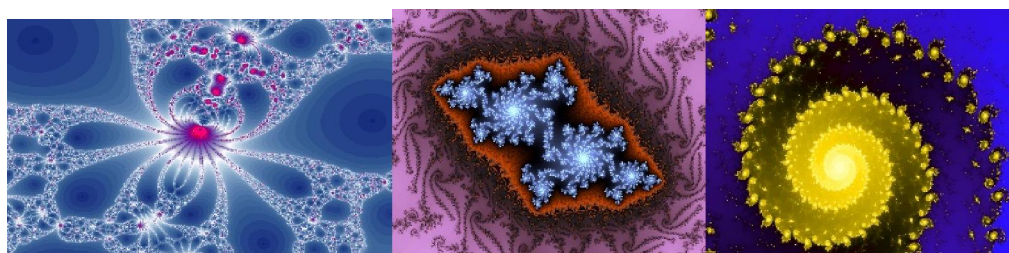
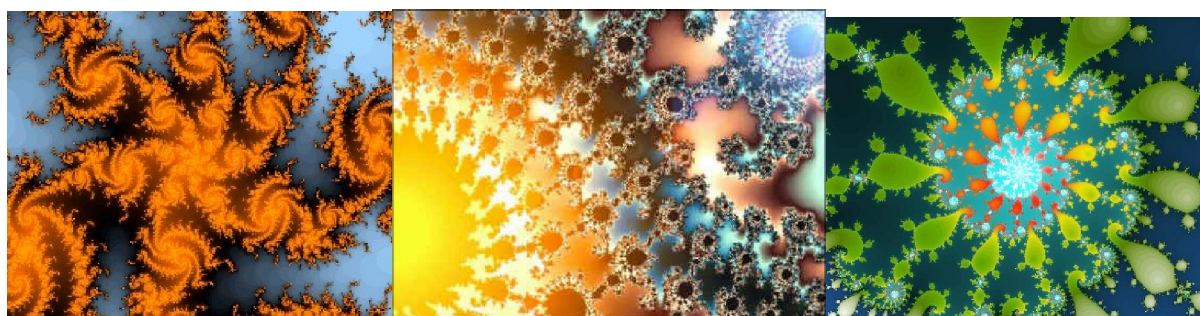
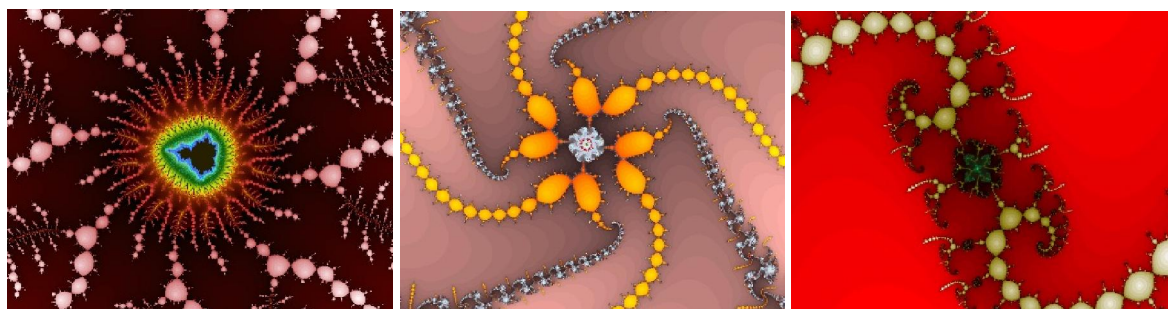


Quelques photos de figures fractales : premiers monstres mathématiques et nouvelles figures obtenues grâce aux progrès informatiques.

*Ensembles de Mandelbrot :*



*Quelques images intéressantes :*



## **Bibliographie :**

« Les Objets fractals », Mandelbrot, Flammarion, 1975, 1984, 1989, 1995

« Universalités et fractales », Sapoval, Flammarion, 1997

Revue « Pour la Science » n°300, octobre 2002

Revue « La Recherche » n°85, janvier 1978

Eloge de la plante de Francis Hallé, Seuil, 1999

<http://membres.lycos.fr/lesfractales/nav.html>

[www.lesfractales.nomades.ch/index.html](http://www.lesfractales.nomades.ch/index.html)

<http://barbara.petit.free.fr/fractales/veget.html>

<http://www.lesfractales.nomades.ch/index.html>